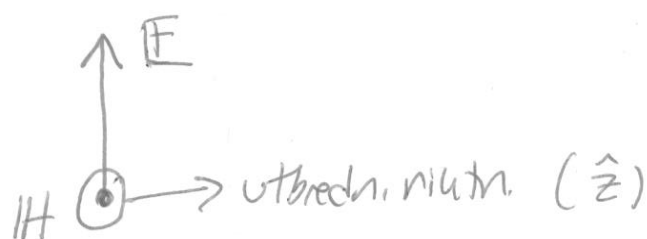


Exempel: Dämpad TEM-våg

①

Vågfunktion för $\underline{E}$ -fältet:

$$\underline{E}(t, z) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{toppvärdet} \\ \text{vid } z=0}}{E_0} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{damping}}}{e^{-\alpha z}} \cdot \underset{\substack{\nearrow \\ \text{utbredning i} \\ z\text{-riktning}}}{\cos(\omega t - \beta z)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fältet rikt} \\ \text{i } x\text{-riktning} \\ (\hat{x} = \text{vektor med} \\ \text{längden 1 som} \\ \text{angr riktning)}}}{\hat{x}}$$



$$\omega = 2\pi \cdot 10^9 \text{ rad/s}, \quad E_0 = 1 \text{ V/m}$$

Dämpkonstanten α och vågtalet β beräknas m.h.a. mediets elektriska/magnetiska egenskaper & ω .

Uppgift: Skissa en graf av effekttäthetens tidsmedelvärde som funktion av z .

Beräkna också uttryck för $\underline{E}$ & $\underline{H}$ -fälten, samt fashastigheten.

(2)

Effektitet = Poyntingvektor :

$$\mathcal{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \Rightarrow |\mathcal{S}| = |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{H}| \text{ i vårt fall.}$$

$$\text{Använd vågimpedans} \Rightarrow |\mathbf{H}| = \frac{|\mathbf{E}|}{Z_{\text{TEM}}} \Rightarrow |\mathcal{S}| = \frac{|\mathbf{E}|^2}{Z_{\text{TEM}}}$$

Tidsmedelvärde : Uttryck $\mathbf{E}$ som ett komplext tal,

$$\underline{\mathbf{E}}(z) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$$

(har här nu undertryckt tidsberoende termen $e^{j\omega t}$)

$$S_{\text{medel}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \quad \nearrow \\ \text{komplexa tal}}}{\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{H}}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}}{Z_{\text{TEM}}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{Z_{\text{TEM}}} \right\} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}|^2}{|Z_{\text{TEM}}|} \cdot \cos \varphi$$

$$Z_{\text{TEM}} = |Z_{\text{TEM}}| e^{j\varphi}$$

$$\text{där } |\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}_0|^2 \cdot e^{-2\alpha z}$$

$$|Z_{\text{TEM}}| = \left| \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \right|$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} Z_{\text{TEM}}}{\operatorname{Re} Z_{\text{TEM}}} \right)$$

(3)

Medium: $\sigma = 0,2$ siemens/meter

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ henry/meter}$$

$$\epsilon = 10 \cdot \epsilon_0 = 10 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ farad/meter}$$

$$\Rightarrow Z_{\text{TEM}} \approx \sqrt{\frac{7895,7 j}{0,2 + 0,5565 j}} = \sqrt{\frac{7895,7 \cdot e^{j\pi/2}}{0,5912 \cdot e^{j1,2257}}} \approx$$

$$\approx 115,6 \cdot e^{j0,1726} \Omega$$

dvs $|Z_{\text{TEM}}| \approx 115,6 \Omega$, $\varphi \approx 0,1726$ radianer

Till Smedel behövs också dämpkoeff. α .

Man kan för utbredningskonstanten ("gångkonstanten")

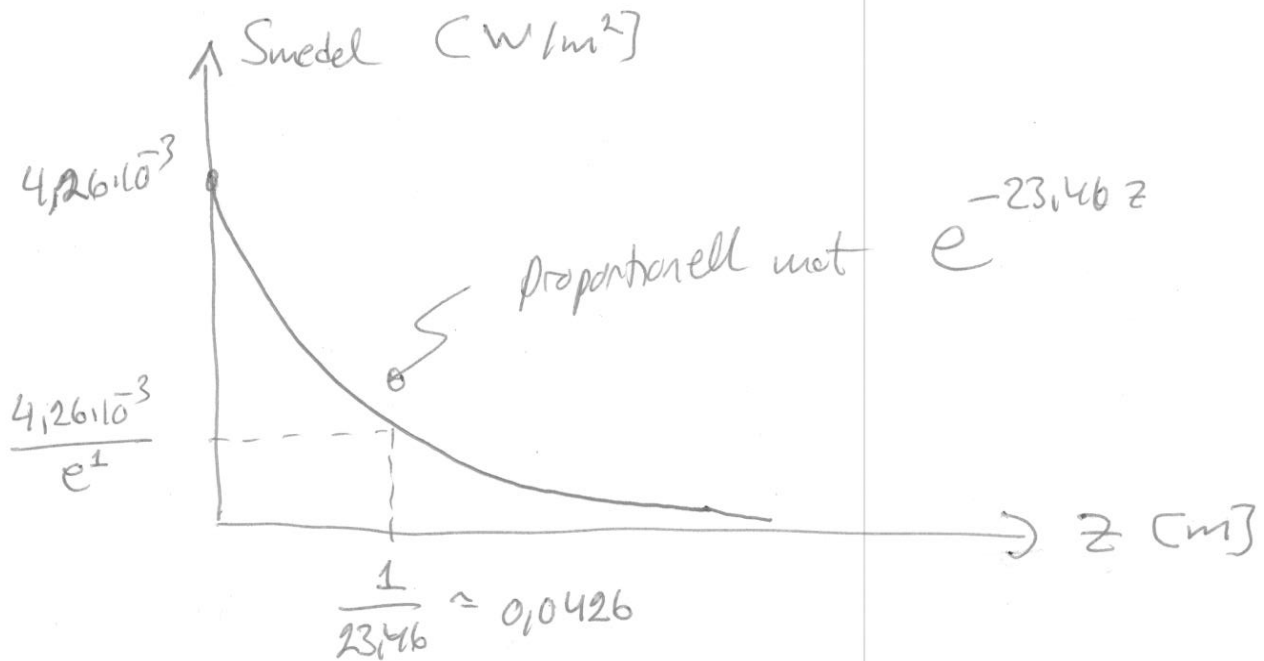
$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \approx$$

$$\approx 68,32 e^{j1,39825} = 11,73 + j 67,306 \text{ 1/m}$$

dvs $\alpha \approx 11,73$ nepen/meter , $\beta \approx 67,306$ rad/m

(4)

$$\Rightarrow S_{\text{medel}} \approx 4,26 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-23,46 \cdot z} \quad \text{W/m}^2$$



Vågen dämpas snabbt!

Fas hastighet: $v_{\text{f}} = \frac{\omega}{\beta} \approx 0,93 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 0,31 \cdot c_0$

$$E(z) = E(\omega) e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(t, z) &= \hat{x} \cdot \text{Re} \{ E(z) \cdot e^{j\omega t} \} = \hat{x} E(\omega) e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z) \\ &= \hat{x} \cdot e^{-11,73 z} \cdot \cos(2\pi 10^9 t - 67,3 \cdot z) \quad \text{volt/meter} \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{E(z)}{z_{\text{TEM}}} = \frac{E(\omega) \cdot e^{-\alpha z}}{|z_{\text{TEM}}|} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{-j\varphi} \quad \Rightarrow$$

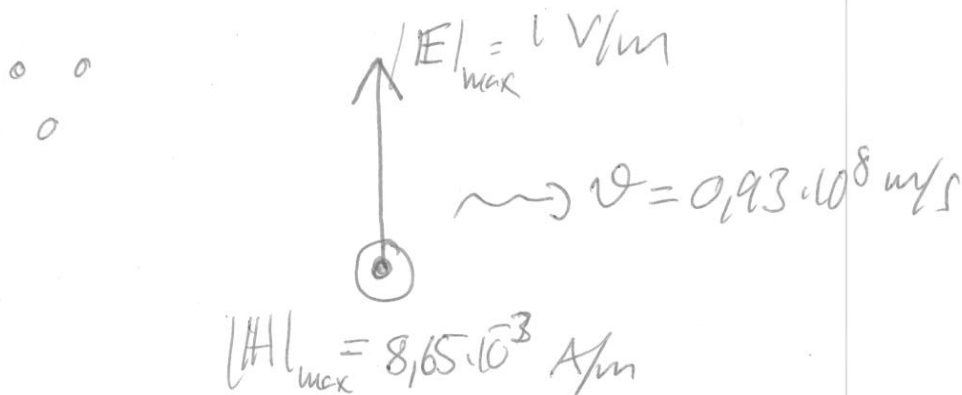
(5)

$$H(t, z) = \hat{y} \cdot \operatorname{Re} \left\{ H(z) e^{j\omega t} \right\} = \hat{y} \cdot \frac{E_0}{|z_{TEM}|} e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z - \varphi) =$$

↑
riktad i y-led

$$= \hat{y} \cdot 8,65 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-11,73z} \cdot \cos(2\pi 10^9 t - 67,3z - 0,173)$$

ampere/meter



EXTRA UPPGIFT!

Härled uttrycken för z_{TEM} & γ mha ekvationerna (Maxwell!)

$$\begin{cases} -\frac{dH}{dz} = \sigma E + \epsilon \frac{dE}{dt} \\ -\frac{dE}{dz} = \mu \frac{dH}{dt} \end{cases}$$

Leh.: Ansätt för E & H :

$$E = E_0 e^{j(\omega t)} \cdot e^{-\gamma z}$$

$$H = H_0 e^{j(\omega t)} \cdot e^{-\gamma z}$$