

Formelsamling LMA017 17/18

Längdelement för kurva $\mathbf{r}(t)$

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$$

Skalärt ytelement till integraler av funktioner för parametriserad yta $\mathbf{r}(u, v)$ i rummet

$$dS = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)|dudv.$$

Om $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ så är $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) = (-f_u, -f_v, 1)$.

Tyngdpunkt av kurva C , $(x(t), y(t), z(t))$

$$(x_T, y_T, z_T), \text{ där } x_T = \frac{1}{L} \int_C x(t)ds \text{ osv., med } L = \int_C ds$$

Tyngdpunkt av parametriserad yta S , $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$(x_T, y_T, z_T), \text{ där } x_T = \frac{1}{A} \iint_S x(t)dS \text{ osv., med } A = \iint_S dS$$

Tyngdpunkt av kropp D

$$(x_T, y_T, z_T), \text{ där } x_T = \frac{1}{V} \iiint_D x(t)dV \text{ osv., med } V = \iiint_D dV$$

Green's formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Polära koordinater $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

$$dA = dx dy = r dr d\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$

$$dV = dx dy dz = r dr d\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x, y, z) = (\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi))$

$$dV = dx dy dz = \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

Derivator

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}, \quad a \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Integraler

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx \quad \text{där } F'(x) = f(x) \text{ och } G'(x) = g(x)$$