1 Exempel (II)

1. Vid upprepade kast med tärning, vad är sannolikheten att får en 6 :a f.f.g. vid det femte kastet?

   Lösning

   Vi har att göra med en Geo(1/6). Sökt sannolikhet är

   $$P = p(\xi = 5) = (1 - 1/6)^4 \cdot 1/6 = 0.0803755... \approx 0.080$$

2. Ibland testar man produkter sekventiellt. Antag att en varje produktenhet är defekt med sannolikhet 0.05 =: p. Vad är sannolikheten att hitta en defekt enhet f.f.g. vid den 11:e kontrollerade produktenheten?

   Lösning

   Låt ζ vara antal kontroller, tills dess man finner en defekt f.f.g.
   Då är $\zeta \in$ Geo(0.05) och

   $$P(\zeta = 11) = (1 - p)^{10} \cdot p = 0.0299... \approx 0.03.$$

   Vi passar på att beräkna x, så att

   $$P(\zeta = x) = 0.01$$

   Alltså är

   $$0.01 = 0.95^{x-1} \cdot 0.05 \iff \frac{1}{5} = 0.95^{x-1} \iff x = 1 - \frac{\lg 5}{\lg 0.95}$$

   som ger $x = 32.3772..$, alltså 33 gånger.

3. Vi fortsätter med en variant av den geometriska fördelningen ovan och ger en formel för sannolikheten att få en en defekt produkt f.a.g., d.v.s. för andra gången?

   Lösning

   Låt η vara antalet testade produkter, t.o.m. den testade produkten, då man finner en defekt produkt f.a.g. Sätt först $\eta = 11$ och $p = 0.05$. De 10 första testen finns det alltså *en* defekt. Det kan inträffa på $\binom{11-1}{1}$ sätt. Då är

   $$P(\eta = 11) = \binom{11-1}{1}(1 - 0.95)^9 \cdot 0.05^2 = 0.0016$$

   Med bokstäver skrivs sannolikheten

   $$P(\eta = x) = \binom{x-1}{1}(1 - p)^{x-2}p^2.$$

4. Vi generaliserar till att beräkna sannolikheten hålla på att testa produkter tills de k första defekta har hittats.

$$P(\eta = x) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k\,.$$

   Denna fördelning kallas *negativ binomialfördelning*.

5. Bevisa att

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(\xi = x) = 1$$

   om $\xi \in \mathrm{Po}(\lambda)$.

6. Antal långtradare som anländer till en terminal är poissonfördelad med väntevärde 5.5 (räknat på ett dygn). Vad är sannolikheten att det kommer

   (a) exakt 4?

   (b) mellan 2 och 3?

   Lösning

   Låt ξ vara antal anländande långtradare på ett ddygn. Då är $\xi \in \mathrm{Po}(5.5)$.

   (a) exakt 4:

$$P(\xi = 4) = e^{-5.5}\frac{5.5^4}{4!} = 0.155819... \approx 0.16$$

   (b) mellan 2 och 3:

$$= e^{-5.5}\frac{5.5^2}{2!} + = e^{-5.5}\frac{5.5^3}{3!} = 0.175135... \approx 0.18$$

7. I ett parti på 200 bräder är andelen defekta $3\% = 0.03 = p$. Man har följande förfarande för att godkänna/underkänna partiet. Man väljer ut 10 bräder. Om alla är korrekta godkänns partiet. Om exakt en är defekt, tar man ytterligare 10. Partiet godkänns då endast om dessa ytterligare 10 är korrekta.

   (a) Vad är sannolikheten att partiet godkänns?

   (b) Vad är sannolikheten att partiet godkänns, om exakt en i första kontrollen är defekt?