

Helikopterlaborationen - Tillämpad Matematisk Statistik

John Croft
Andreas Johansson

8 mars 2017

1 Inledning

Ingengörsavdelningen på *Företaget Munksjö Flygmotor* har fått i uppdrag att utveckla en ny pappershelikopterprototyp i syfte att förlänga flygtiden. I brist på resurser är det bestämt att man skall använda sig av ett *reducerat* faktorförsök.

Prototypen skall ha fem faktorer som varierar i två nivåer, vilket visas i tabell 1.

Tabell 1: Faktorindex med nivåerna de kan anta

Faktor	(-)	(+)
Papperskvalitet (A)	a	b
Bredd (B)	3 cm	5 cm
Längd (C)	8 cm	13 cm
Vingbredd (D)	8 cm	13 cm
Gem (E)	Ja	Nej

Resultaten från försöken används sedan för att skatta *effekterna* hos huvud- och samspelsfaktorerna. Det kan man sedan vidareutveckla med olika statistiska medel för att försöka säga vilka faktorer och samspel som är signifikanta för flygdugligheten. Man ska då kunna ge råd om hur man skall gå tillväga för att maximera flygdugligheten.

2 Utförande

Eftersom man har fem faktorer så skulle ett *fullständigt faktorförsök* kräva $2^5 = 32$ försök. Eftersom försöksplanen har *reducerats* med en nivå så krävs det dock bara hälften så många, ty $2^{5-1} = 2^4 = 16$.

För att åstadkomma försöken skapades 16 unika pappershelikoptrar utformade efter mallen i figur 2 (bilaga). Vilken nivå varje huvudfaktor skulle anta i varje försök beskrivs i *designmatrisen* i figur 3 (bilaga).

Faktor A och E (*papperkvalitet* och *gem*) var inte direkt specificerade och valdes i denna laboration till följande: *papperkvalitén* bestod av kartongpapper som negativ nivå (-) och skrivarpapper som positiv nivå (+); *gemet* var gjord av lättviktig plast.

För att konstruera pappershelikoptrarna så viktas 'vingarna' ner så att de var ungefär vinkelräta mot kroppen; 'sidovingarna' viktas medurs tills de också var ungefär vinkelräta mot kroppen. Utöver det så bestämdes det att prototypen alltid skulle ha samma totala längd oavsett nivåerna på faktorerna *längd* och *vingbredd*.

Själva försöket utfördes genom att släppa pappershelikoptrarna från 4:e våningen i hus Jupiter och mäta tiden tills de landade på marken med en tidtagarur. Misslyckade försök gjordes om efter att alla de andra försöken hade utförts. Tiden mättes i *resultat* kolumnen i *designmatrisen* (bilaga). Försöken gjordes i slumpmässig ordning för att mitigera *bakgrundsvariabler* och *störfaktorer* såsom t.ex. varierande temperatur.

3 Resultat

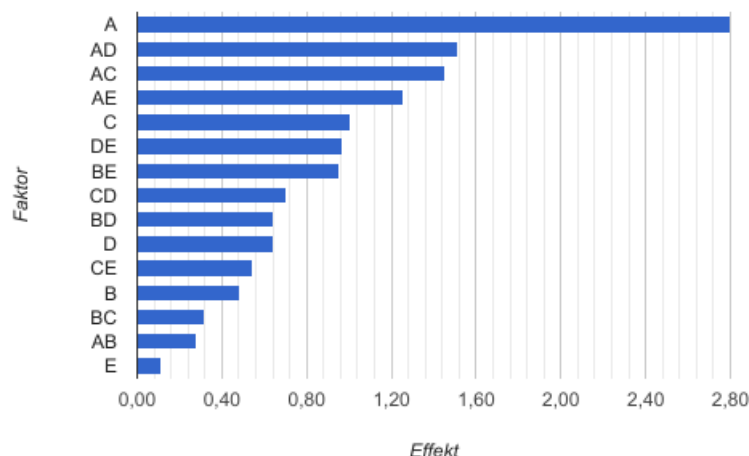
De uppmätta flygtiderna för varje faktorkombination finns i *designmatrisens resultat* kolumn. Med dessa så kunde *effekten* av varje huvudfaktor (A,B, ... E) och 2-faktorsamspel (AB, AC, ... DE) beräknas på följande vis:

$$\ell_x = \ell_x^+ - \ell_x^-$$

där ℓ_x^+ och ℓ_x^- är medelvärden av alla tider som stämmer överens med (+) respektive (-) nivån för faktor x .

Dessa värden finns i *effekt* raden i *designmatrisen* och deras absolutbelopp visas i *Paretodiagrammet* i figur 1.

Bara *2-faktorsamspelseffekter* beräknades eftersom samspel av ordning 3 och högre antas vara försumbara.



Figur 1: Paretodigram

4 Analys

Tolkning *Paretodigrammet* visar hur stor effekt varje faktor har oavsett om den är positiv eller negativ (dessa är ändå godtyckligt valda). Det är dock uppenbart i diagrammet att effekterna inte skiljer sig så mycket åt, utan är mer graderad, vilket gör det svårare att bedöma vilka effekter som är av signifikans.

Ett annat sätt att få ett överblick över effekternas inverkan är att använda en *normalfördelningsplot* som den i figur 4 (bilaga). Detta tillåter oss även att skatta referensfördelningen. Normalfördelningsplotten har i det här fallet dock samma problem som med paretodigrammet: att datapunkterna inte är särskild avvikande från vår skattad referensfördelning (röda strecket), vilket gör det svårt att bestämma signifikans.

Med båda graferna i åtanke så skulle man nog grovt kunna säga att effekterna A, AC, AD, AE, C, DE, BD och BE är i någon mån signifikanta.

Om vi tar hänsyn till de fyra största effekterna så kan vi tydligt se att alla beror på faktor A: *papperskvalitén*. Eftersom ℓ_A är starkt positiv så är det en bra indikation på att flygdugligheten kan förbättras genom att byta från kartongpapper till det mer lättviktiga skrivarpappret.

Samspelseffekterna ℓ_{AC} och ℓ_{AD} är också positiva, vilket kan tolkas som att man kan förbättra flygdugligheten genom att byta till skrivarpapper *och* öka *längden* respektive *vingbredden* från 8cm till 13cm. ℓ_{AE} är negativ, men eftersom den negativa nivån på faktor E var att man *skulle* ha ett *gem* som ballast, så kan det tolkas som att flygdugligheten kan förbättras genom att byta till skrivarpapper *och* använda gem som ballast.

Av lite mindre betydelse är effekterna ℓ_C , ℓ_{DE} och ℓ_{BE} som alla ligger på ungefär samma nivå (räknat i absolutbelopp). Huvudfaktorseffekten ℓ_C är positiv och kan tolkas som att en större *bredd* ger bättre prestanda. ℓ_{DE} är negativ, men på samma sätt som för ℓ_{AE} tidigare, innebär detta en positiv effekt när man kombinerar en större *vinglängd* med ett *gem* som ballast. ℓ_{BE} tolkas precis på samma sätt, att ökad *bredd* i samspel med ett *gem* som ballast ger en positiv effekt.

Återstående effekter är, enligt graferna, av ännu mindre betydelse för flygdugligheten och tas därmed inte upp.

Sammanblandningsmönster I och med att försöksplanen har *reducerats* så vet vi att vi kommer att få sammanblandning av faktorer vid beräkning av dess effekter. För att ta reda på fak-

torernas *sammanblandningsmönster* så måste man först göra några antaganden om på vilket sätt reduceringen har skett.

När man reducerar ett fullständigt faktorförsök (FF) så kan man börja med att ställa upp en designmatris med ett reducerat antal faktorer, motsvarande reducerade försöksplanens nivå, som om det vore ett FF. Man kan då 'återinföra' de faktorer man tog bort genom att ersätta en eller flera av samspelsfaktorerna, lämpligen en av högre ordning eftersom dess effekt är i regel mindre betydelsefull.

I det här fallet gissar vi att man ställt upp ett FF med 4 faktorer och använt kolumnen med högsta ordningen samspel, dvs. ABCD, som den 5:e faktorn, E. Detta visas sig stämma och kan bevisas rent analytiskt genom att manuellt beräkna produkten av ABCD. Detta medför att $E = ABCD$ är *generatoren* för det reducerade faktorförsöket och att den *definierande relationen* är $I = ABCDE$. Generatoren har således en upplösning av V (eftersom antalet faktorer i 'ordet' i den *definierande relationen* är fem), vilket kan anses vara bra eftersom man då, rent teoretiskt, bara sammanblandar huvudeffekter med 4-faktorsamspelseffekter, vilka kan försummas.

Med hjälp av den *definierande relationen* kan *sammanblandningsmönstren* nu beräknas, vilket visar vad man egentligen beräknar när man beräknar effekten av en viss huvud- eller samspelsfaktor. Eftersom man har reducerat försöksplanet med 1 nivå, så förväntas det att antalet *alias* till varje huvud- eller samspelsfaktor är $2^1 - 1 = 1$, dvs. varje effekt består av sig själv och en annan faktor.

<i>Huvudeffekter</i>	<i>2-faktorsamspelseffekter</i>
$\ell_A = A + BCDE$	$\ell_{AB} = AB + CDE$
$\ell_B = B + ACDE$	$\ell_{AC} = AC + BDE$
$\ell_C = C + ABDE$	$\ell_{AD} = AD + BCE$
$\ell_D = D + ABCE$	$\ell_{AE} = AE + BCD$
$\ell_E = E + ABCD$	$\ell_{BC} = BC + ADE$
	$\ell_{BD} = BD + ACE$
	$\ell_{BE} = BE + ACD$
	$\ell_{CD} = CD + ABE$
	$\ell_{CE} = CE + ABD$
	$\ell_{DE} = DE + ABC$

5 Slutsats

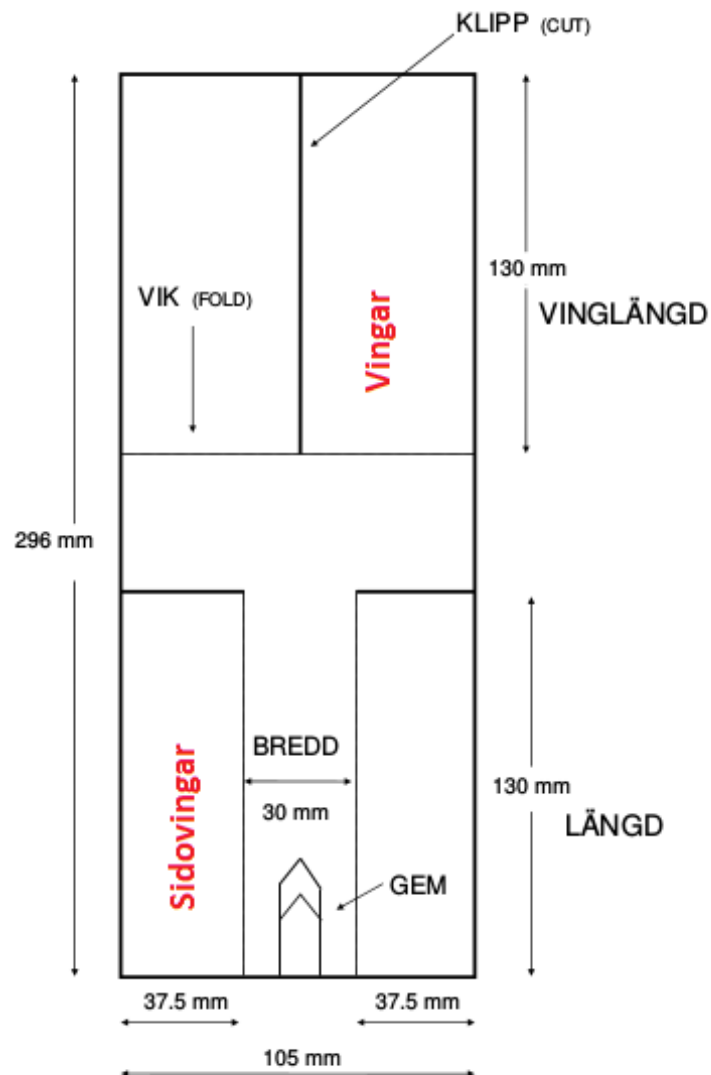
Genom att ta fram *sammanblandningsmönstren* så har vi visat att de beräknade effekterna är pålitliga och inte påverkas nämnvärt av andra faktorer. *Paretodiagrammet* och *normalfördelningsplotten* ger dock inte många självklara val på faktorer som påverkar flygdugligheten på en signifikant nivå, eftersom spridningen i det här fallet är mer graderad, med mindre signifikanta avvikelser.

Detta skulle möjligen kunna åtgärdas genom att använda en annan typ av faktorförsök, så att man kan skatta variansen och därefter beräkna ett konfidsintervall.

Vi kan trots det ge en rekommendation grundat i analysen som utfördes i kapitel 4. För att maximera tiden i luften och därmed flygdugligheten, skall man använda skrivarpapper och inte det tyngre kartongpappret, samtidigt som man ökar *längden* och *vingbredden* och använder ett *gem* som ballast. *Bredden* i sig är inte av någon större betydelse men ökad *bredd* i samspel med ett *gem* kan leda till en måttlig positiv effekt.

6 Bilagor

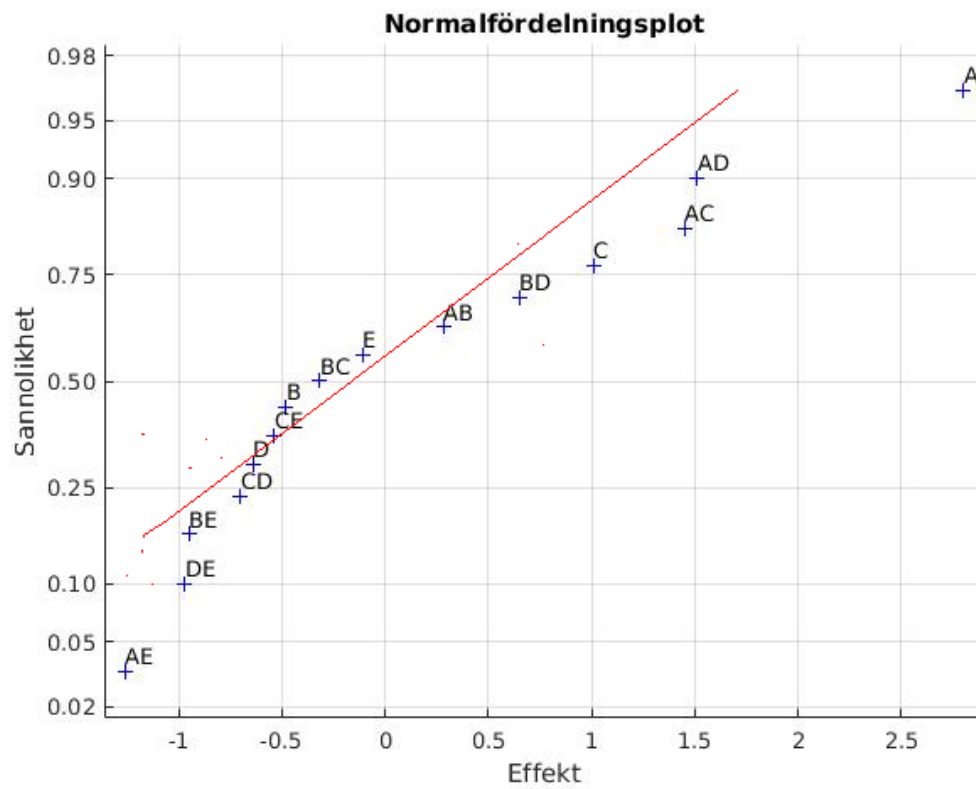
Standard Design:



Figur 2: Designmallen för pappershelikoptrarna.

Prov nr.	A	B	C	D	E	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE	Resultat
1	-	-	-	-	x	x	x	x	-	x	x	-	x	-	-	11,26
2	x	-	-	-	-	-	-	-	-	x	x	x	x	x	x	8,47
3	-	x	-	-	-	-	x	x	x	-	-	-	x	x	x	7,52
4	x	x	-	-	x	x	-	-	x	-	-	x	x	-	-	8,08
5	-	-	x	-	-	x	-	x	x	-	x	x	-	-	x	8,78
6	x	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	-	-	x	-	12,50
7	-	x	x	-	x	-	-	x	-	x	-	x	-	x	-	8,62
8	x	x	x	-	-	x	x	-	-	x	-	-	-	-	x	12,28
9	-	-	-	x	-	x	x	-	x	x	-	x	-	x	-	6,53
10	x	-	-	x	x	-	-	x	x	x	-	-	-	-	x	9,52
11	-	x	-	x	x	-	x	-	-	-	x	x	-	-	x	7,45
12	x	x	-	x	-	x	-	x	-	-	x	-	-	x	-	12,08
13	-	-	x	x	x	x	-	-	-	-	-	-	x	x	x	6,83
14	x	-	x	x	-	-	x	x	-	-	-	x	x	-	-	12,99
15	-	x	x	x	-	-	-	-	x	x	x	-	x	-	-	6,76
16	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10,23
$\Sigma y+$	86,15	73,02	78,99	72,39	74,49	76,07	80,76	81	69,92	73,67	77,53	71,15	72,14	72,78	71,08	
$\Sigma y-$	63,75	76,88	70,91	77,51	75,41	73,83	69,14	68,9	79,98	76,23	72,37	78,75	77,76	77,12	78,82	
$\Sigma y+ - \Sigma y-$	22,40	-3,86	8,08	-5,12	-0,92	2,24	11,62	12,10	-10,06	-2,56	5,16	-7,60	-5,62	-4,34	-7,74	
Nämnare	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	
Effekt	2,80	-0,48	1,01	-0,64	-0,11	0,28	1,45	1,51	-1,26	-0,32	0,65	-0,95	-0,70	-0,54	-0,97	

Figur 3: Designmatrisen för det reducerade faktorförsöket.



Figur 4: Normalfördelningsplot skriven i Matlab