

Metoder att avgöra stabiliteten hos återkopplade system

Tre metoder ingår i kursen

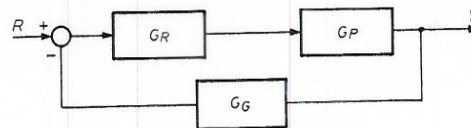
- 1) Polbestämning
- 2) Rouths´metod
- 3) Nyquist-kriteriet

OBS! Alla är lika viktiga eftersom de har olika fördelar och nackdelar.

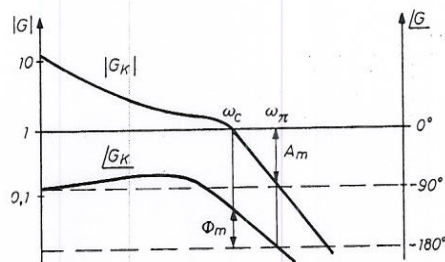
Nyquistkriteriet finns i två varianter, dels det förenklade Nyquistkriteriet, dels det fullständiga Nyquistkriteriet.

Nyquists förenklade stabilitetskriterium*

Ett återkopplat lineärt system är stabilt om amplitudförstärkningen hos kretsöverföringen $|G_K|$ är mindre än ett vid den frekvens där fasförskjutningen $\angle G_K$ är -180 grader. I annat fall är systemet instabilt.



$$Krets\overf\ddot{o}r\ddot{o}ringen\ G_K = G_R \cdot G_P \cdot G_G$$

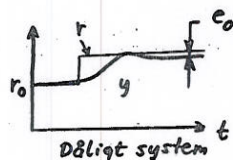
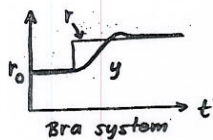


Statisk noggrannhet

Reglersystemets egenskaper i statiskt tillstånd, förmågan att följa börvärdeändringar och att klara störningar. (kap 4)

Tre typer av kvarstående fel

e_0 = kvarstående felet vid stegändringar i börvärdet.



- e_1 = motsvarande fel vid rampformade börvärdesändringar
- e_v = motsvarande fel vid stegstörningar

Fråga: Hur beräknas e_0 , e_1 och e_v ?

Statisk noggrannhet (kvarstående fel e_0 , e_1 , e_v)

Kan bestämmas på två sätt

- 1) Med hjälp av gränsvärden (formler)
- 2) Med hjälp av Bodediagram

Statisk noggrannhet – formler

Beräkning av kvarstående fel

- Vid stegformade börvärdesändringar:

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a}{1 + G_R G_P}$$

där a är stegets höjd.

- Vid rampformade börvärdesändringar:

$$e_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h}{s(1 + G_R G_P)}$$

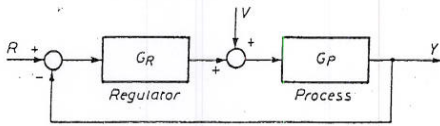
där h är lutningen på rampen.

- Vid stegformade processstörningar:

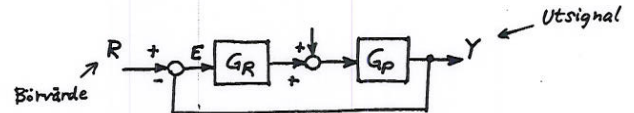
$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_P a}{1 + G_R G_P}$$

där a är stegets höjd.

I formelerna har förutsatts att systemet är stabil och att det beskrivs med nedanstående blockschema, dvs vi försummar givarens dynamik (den förutsätts oändligt snabb).



Bevis (formel för e_0)



Kvarstående fel

$$e_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E = \lim_{s \rightarrow 0} s(R - Y) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s(R - R \cdot G_{TOT}) = \lim_{s \rightarrow 0} sR \left[1 - \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} \right] =$$

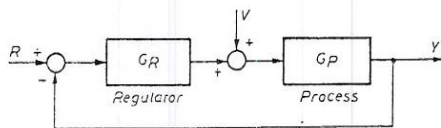
$$= \left\{ R = \frac{a}{s} \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{a}{s} \left[\frac{1}{1 + G_R G_P} \right] =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a}{1 + G_R G_P}$$

Allmänna slutsatser (mycket viktiga slutsatser)

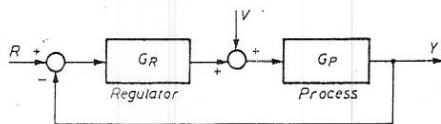
e_0

För att eliminera kvarstående fel efter stegformade börvärdesändringar krävs att antingen regulatorn eller processen innehåller integration (dvs att systemet är av typ ett).



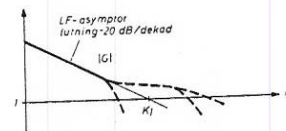
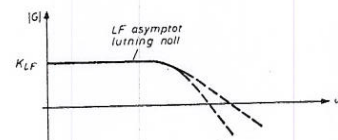
e_v

För att eliminera kvarstående fel efter stegformade processstörningar V krävs att regulatorn G_R innehåller integralverkan.



Kvarstående fel med Bodediagram

Gäller endast felen vid börvärdesändringar (e_0 och e_1)



Typ	Amplitudkurva	Kvarstående fel	
		e_0 (steg)	e_1 (ramp)
Ikke-integrerande kretsöverföring (system av typ 0)		$\frac{1}{1 + K_{LF}}$	∞
Integrerande kretsöverföring (system av typ 1)		0	$\frac{1}{K_I}$

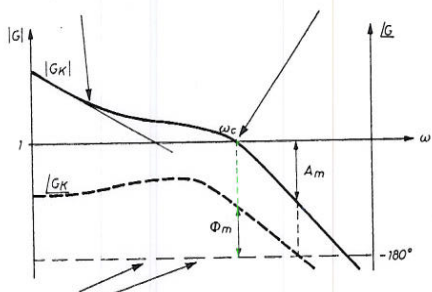
Amplitudkurva för kretsöverföringen

Bestämning av egenskaper med Bodediagram

Sammanfattande figur för stabilitet, snabbhet och kvarstående fel

Kvarstående fel
Kan bestämmas med hjälp av lågfrekvensasymptotens läge och lutning.

Snabbheten
Överkorsningsfrekvensen ω_c är ett mått på snabbheten.



Stabiliteten
Fasmarginen ϕ_m och amplitudmarginen A_m är mått på stabiliteten.

OBS! Det är kretsöverföringen G_K som ska ritas om egenskaperna ska bestämmas enligt ovan.

Resumé – Vad har vi gjort?

Introduktion - Allmänt

- Vad menas med reglerteknik?
- Användningsområden
- Begrepp (återkoppling, blockschema, börvärde)
- Processtyper
- Egenskaper hos reglersystem
- Klassiska reglerprinciper

Grundläggande matematik för dynamiska system

- Laplacetransformen
- Överföringsfunktioner
- Beräkning av tidsförlopp
- Blockschematransformering
- Frekvensanalys (Bestämning av $A(\omega)$ och $\phi(\omega)$)

Modellering (fysik mm)

- Teoretisk modellering (mekaniska & termiska system, nivåprocesser och koncentrationsprocesser)
- Experimentell modellering (stegvarsanalys)

Simulering av reglersystem

- Något om Matlab och Simulink

Bestämning av egenskaper hos reglersystem

- Stabilitet (tre metoder)
- Statisk noggrannhet

Vad återstår av kursen?

Beräkning av egenskaper – forts.

- Störningsdämpning
- Snabbhet mm

Dimensionering av PID-reglersystem

- Tumregelmetoder
- Dimensionering med bodediagram

Andra reglerprinciper

- Framkoppling
- Kaskadreglering
- Modellbaserad dimensionering

Digitala (datorbaserade) regulatorer

- Kort repetition av z-transformen
- Kort repetition av tidsdiskreta överföringsfunktioner och differensekvationer
- Digital implementering av regulatorer
- Mikrodatorbaserad reglering och inbyggda reglersystem

Tillståndsmodeller

- Ytterligare en modelltyp för simulering och analys av "stora" dynamiska system

Störningar – några exempel

En av reglersystemens viktigaste uppgifter är att dämpa inverkan av olika slags störningar.

Exempel	Störningar
• Farthållare för bilar 	Varierande väglutning, motvind, ojämn väg bana mm.
• Autopilot för flygplan 	Vindbyar, luftpropar, turbulens mm.
• Temperaturreglering i hus 	Utetemperatur, vind, solstrålning, elförbrukning mm.

Två huvudtyper av störningar

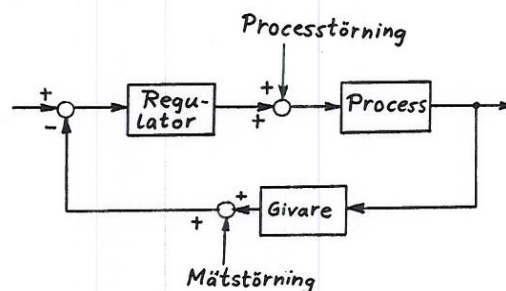
Processtörningar

Påverkas själva processen. Påverkar utsignalen med eller utan återkoppling.

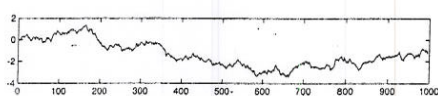
Mätstörningar

Påverkar mätningen av utsignalen; givaren. Påverkar utsignalen endast om systemet är återkopplat.

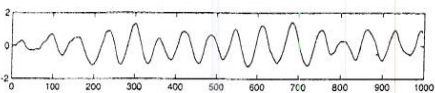
- Processtörningar är ofta mer lågfrekventa än mätstörningar.
- Processtörningar oftast viktigast att analysera.



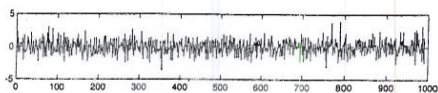
Störningar av olika karaktär



Lågfrekventa störningar



Störningar med någon speciellt framträdande frekvens



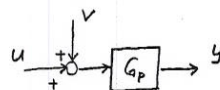
Mkt högfrekventa störningar

Störningsdämpning – formler

Antag att vi har en process som påverkas av sinusformade störningar $v(t) = A \sin$

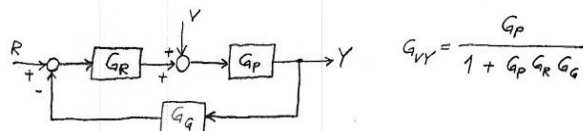
Vi ska analysera hur mycket störningen påverkar utsignalen i följande två fall:

Process utan reglering:



$$\text{Utsignalens amplitud } A_1 = A \cdot |G_p|$$

Process med reglering:

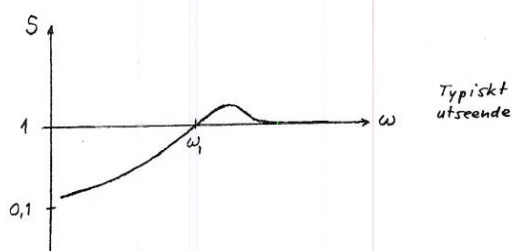


$$\Rightarrow \text{Utsignalens amplitud } A_2 = A \cdot \frac{|G_p|}{|1 + G_p G_R G_g|}$$

För att avgöra skillnaden bestämmer vi kvoten mellan A_2 och A_1 .
Kvoten S kallas för känslighetsfunktionen och visar hur bra störningsdämpningen är vid olika frekvenser.

$$S = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{|G_P|}{|1 + G_P G_R G_G|}}{|G_P|} = \frac{1}{|1 + G_P G_R G_G|}$$

Normalt utseende på amplitudkurvan $|S|$



Ju lägre värde vi har på $|S|$, desto bättre!

Observera att det normalt finns ett område där resultatet blir sämre med än utan reglering.

Störningsdämpning

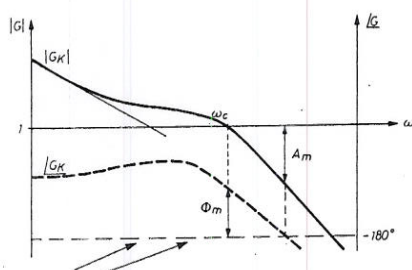
- Förmågan hos ett regelsystem att dämpa inverkan av störningar (kallas också för störningsundertryckning)
- Störningsdämpningen är en funktion av frekvensen ω .
- Hur bra dämpningen är av processstörningar ges av den s.k. känslighetsfunktionen $S(j\omega)$.

$$S(j\omega) = \frac{1}{|1 + G_P \cdot G_R \cdot G_G|}$$

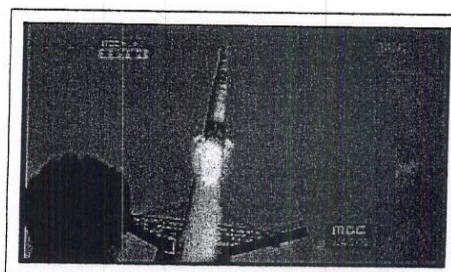
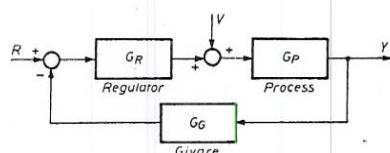
Stabilitet med Bodediagram

Rita kretsöverföringen G_K i ett bodediagram $G_K = G_R \cdot G_P \cdot G_G$

Avläs enligt nedan



Stabiliteten
Fasmarginen ϕ_m och amplitudmarginen A_m är mått på stabiliteten.



Dämpning av lågfrekventa processtörningar

Störningsdämpningen ges av känslighetsfunktionens absolutbelopp

$$S_{\text{dämp}} = \frac{1}{|1 + G_R G_P G_C|}$$

Vid låga frekvenser gäller normalt att $|G_R G_P G_C| \rightarrow \infty$, dvs.

$$S_{\text{dämp}} \approx \frac{1}{|G_R G_P G_C|}$$

Den enda faktorn vi kan påverka är $|G_R|$

Slutsats

Dämpning av lågfrekventa störningar är starkt kopplad till regulatorns förstärkning $|G_R|$ vid låga frekvenser.

Om $|G_R|$ är stor får god störningsdämpning.

(viktig slutsats vid dimensionering)

(sid 177)

Forts.

Antag att vi har en regulator med integralverkan. I så fall gäller att

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_R(s) = \frac{K_i}{s}$$

och $\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_R(j\omega)| = \frac{K_i}{\omega}$

Ju större värde vi har på K_i desto bättre störningsdämpning

Mått på störningsdämpningen

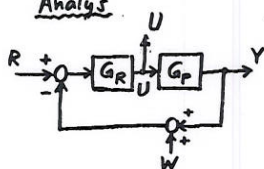
$$J_v = \frac{1}{K_i}$$

ska vara så liten som möjligt

Styrsignalaktivitet

- Mått på hur stora styr signaler ett regelsystem med en viss regulator kräver (vid störningar & bärvärdesändringar)
- Styrsignalaktiviteten bör inte vara för stor, speciellt inte vid höga frekvenser.

Analys



Blockschematransformering ger:

$$\frac{U}{R} = \frac{G_R}{1 + G_P G_R}$$

$$\frac{U}{W} = \frac{-G_R}{1 + G_P G_R}$$

Vid höga frekvenser ($\omega \rightarrow \infty$) gäller $|G_P G_R| \rightarrow 0$

Vi får därför:

$$J_u = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{G_R}{1 + G_P G_R} \right| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_R|$$

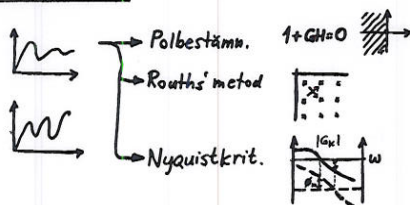
Slutsats

För att undvika för hög styrsignalaktivitet vid höga frekvenser bör regulatorns HF-förstärkning $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_R|$ begränsas.

(sid 179)

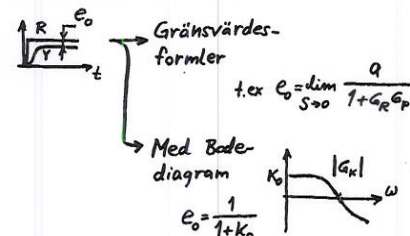
Bestämning av egenskaper hos reglersystem - repetition

• STABILITET

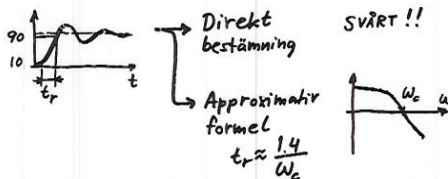


• STATISK NOGGRANNHET

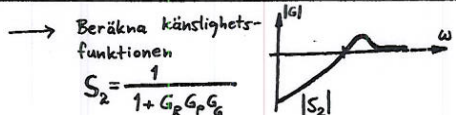
(beräkning av e_0 , e_i och e_v)



• SNABBHET



• STÖRNINGS-DÄMPNING



Egenskaper hos reglersystem

- Störningsdämpning
 - Snabbhet
 - Statisk noggrannhet*
 - Stabilitet
 - Styrsignalaktivitet
- } BIVILLKOR

* Kan man ofta bortse från då man har I-reglering.

Vanligen önskas att störningsdämpningen och snabbheten blir så bra som möjligt UNDER BIVILLKORET att stabiliteten är tillräcklig och att styrsignalaktiviteten inte blir för stor.

Ytterligare bivillkor som kan tillkomma: Kostnader, Utrymme, Driftssäkerhet, Underhållsbehov, Robusthet.

Det fullständiga Nyquist-kriteriet

Den första generella stabilitetsmetoden som fungerar för alla typer av lineära system.

Bygger på "argumentvariationsprincipen" från den komplexa matematiken.

Kriteriet bevisades första gången av svensk-amerikanen Harry Nyquist år 1932.

Bakgrund

Antag att $G(s) = \frac{5}{2s+3}$

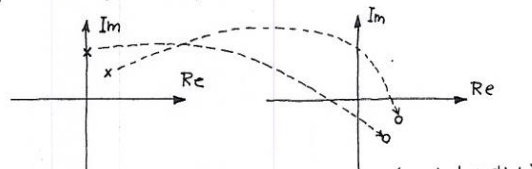
Sätt $s = 3j \Rightarrow G(s) = \frac{5}{2 \cdot 3j + 3} = \frac{5}{6j + 3} =$

$$= \frac{5(6j-3)}{(6j+3)(6j-3)} = \frac{30j-15}{36j^2-9} = \frac{2j-1}{-3} = \frac{1}{3}(1-2j)$$

Sätt $s = 1+2j \Rightarrow G(s) = \frac{5}{2(1+2j)+3} = \frac{5}{5+4j} =$

$$= \frac{5(5-4j)}{(5+4j)(5-4j)} = \frac{25-20j}{25-16j^2} = \frac{25}{41} - \frac{20}{41}j$$

Slutsats av detta Insättning av ett komplext tal ($s = a+bj$) i en överföringsfunktion $G(s)$ ger ett nytt komplext tal för $G(s)$

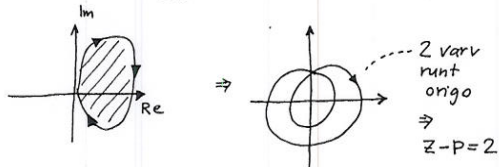


Argumentvariations-principen

Antalet varv (N) som $G(s)$ kurvan omsluter origo är lika med skillnaden mellan antalet nollställen (Z) och antalet poler (P) hos $G(s)$ inom den slutna konturen

$$N = Z - P$$

eller $Z = N + P$



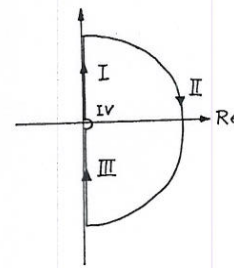
Jättebra !

Principen kan användas för att bestämma antalet nollställen hos $G(s)$ (eller $1+G(s)$) i högra halvplanet [dvs för att bestämma stabiliteten] om den slutna konturen utgörs av hela högra halvplanet

Ett system är ju stabilt om alla nollställen för $1+G_{krets}$ ligger i vänstra halvplanet

Fullständiga Nyquistkriteriet – metod

1. Bestäm kretsöverföringen $G_k(s)$
2. Rita hur $G_k(s)$ varierar som funktion av s då s följer "Nyquists" väg



Fyra delsträckor

- I $s = j\omega$
- II oändlig halvcirkel
- III $s = -j\omega$
- IV liten halvcirkel för att kringgå eventuella poler i origo.

3. Tolka det erhållna diagrammet

Bestäm antalet nollställen hos $1+G_k$ i HHP genom att räkna hur många varv (N) Nyquistkurvan $G_k(s)$ går kring punkten -1 [och med kunskap om antalet poler hos G inom området]

Om $Z = N + P = 0$ fås stabilitet !

Dimensionering

- Tumregelmetoder för PID
- Dimensionering med bode-diagram
- Modellbaserad dimensionering
- Framkoppling & kaskad-reglering

PID-regulatorn

- Den vanligaste regulatorn i industrin (70%)
- Används speciellt för "medelsvåra" reglerproblem i processindustrin (temp, tryck, flöde, nivå, konc)
- Finns i många varianter
- Algoritmen kan även diskretiseras och användas vid tidsdiskret reglering

Innehåller tre parallellkopplade delar

- Proportionell del (P)
- Integrerande del (I)
- Deriverande del (D)

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

K = förstärkningen
T_I = integrationstiden
T_D = deriveringstiden

PROBLEM: Hur ska parametrarna väljas?

Dimensionering av PID-regulatorer – metoder

① Tumregelmetoder

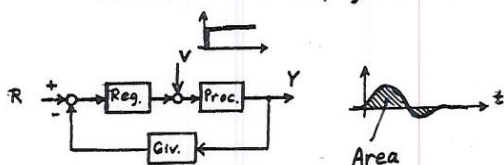
- kräver inte överföringsfunktionen för den process som ska regleras
- leder till "grovinställning" av en regulator.

② Dimensionering med Bodediagram

- här kan man styra vilka egenskaper man önskar hos det färdiga systemet.
- Kräver överföringsfunktionen G(s).

③ Matematiska optimeringsmetoder

- den mest "vetenskapliga" metoden.



Ziegler-Nichols schema

	K	T _I	T _D
P	0,5 · K ₀	-	-
PI	0,45 · K ₀	0,85 · T ₀	-
PID	0,6 · K ₀	0,5 · T ₀	0,125 · T ₀

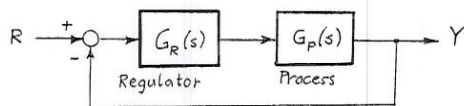
där K₀ = maximala förstärkningen vid P-reglering innan instabilitet.
T₀ = självsvängningens periodtid.

K₀ och T₀ kan bestämmas experimentellt eller beräknas teoretiskt.

Dimensionering med Bodediagram

Typisk problemställning

1) Vi har ett givet system:



2) Kravspecifikation

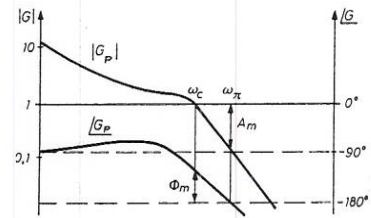
- Stabilitet $\phi_m > 50^\circ$
- Snabbhet $t_r \leq 2$ s
- Kvarstående fel $e_1 \leq 0,05$

Uppgift:

Bestäm en regulator som uppfyller kraven

Lösning – i grova drag

1) Börja med att rita Bodediagrammet för processen:

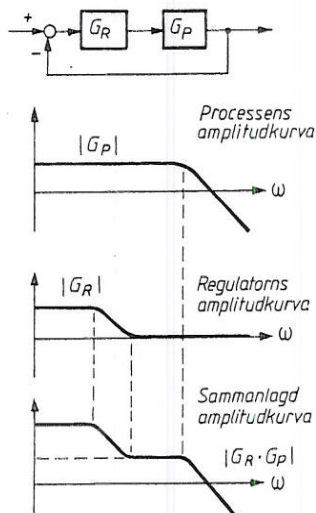


2) Översätt kraven till sådant som kan avläsas i ett Bodediagram

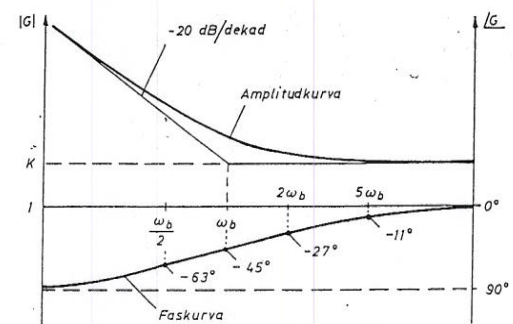
3) Avgör vilken regulator typ som erfordras (P, PI, PD, PID, Lead/Lag)

4) Bestäm parametrarna så att kraven uppfylls

Grafisk addition av Bodediagrammets amplitudkurvor



Dimensionering av PI-regulatorer



PI-regulatorns Bodediagram

Arbetsmetodik – dimensionering av PI-regulatorer

1) Rita först Bodediagram för den process $G_P(s)$ som ska regleras.

2) Bestäm sedan det K -värde som vid ren P-reglering hade givit fasmarginalen $\phi_m = \phi_{min} + 11$ grader.

Orsaken till de extra 11 graderna på fasmarginalen är att den integrerande delen sedan kommer att försämra fasmarginalen i motsvarande utsträckning, se punkt 3.

3) Bestäm vilken överkorsningsfrekvens ω_c som erhålls med ovanstående K -värde. Bestäm därefter T_I så att brytfrekvensen ω_b för PI-regulatorn hamnar på lämpligt avstånd från ω_c . (Ej för högt eftersom detta förstör stabiliteten.)

Ett lämpligt läge för brytfrekvensen är $\omega_b = 0,2 \omega_c$. Detta ger:

$$\omega_b = \frac{1}{T_I} = 0,2 \omega_c \Rightarrow T_I = \frac{1}{0,2 \omega_c}$$

Detta val av T_I gör att fasmarginalen försämras med ca 11 grader (se Bodediagrammet ovan).

En iterativ metod (för optimal störningsdämpning)

En iterativ metod

Ovanstående metod har som främsta fördel att den är enkel och att den garanterar en viss fasmarginal. Den ger dock inte alltid den optimala dämpningen av störningar. Följande iterativa metod kan rekommenderas för reglersystem där kravet på störningsdämpning är högre:

- Prova med olika värden på integrationstiden T_I . Börja med ett relativt stort värde (motsvarande liten integralverkan) och minska sedan successivt. För varje värde på T_I bestämmer du vilken förstärkning K som behövs för att få önskad stabilitetsmarginaler. (Detta kan snabbt göras med Matlab).
- Ur tabellen på samhörande K - och T_I -värden väljer du slutligen de som har högst värde på kvoten K/T_I . (Dessa värden ger högsta möjliga lågfrekvensasymptot för reglatorsystemet och därmed bäst störningsdämpning enligt avsnitt 10.4).

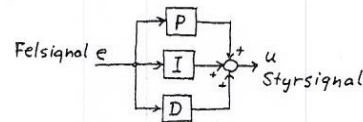
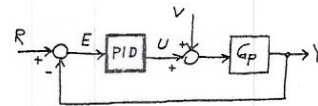
- ① Prova olika värden på T_I .
För varje värde bestämmer du vilken förstärkning K som krävs för att få önskad stabilitet (t ex $\phi_n = 45^\circ$)

- ② Välj sedan den kombination K - T_I som ger högst värde på kvoten K/T_I .

(vilket ger bästa störningsdämpning enligt avsnitt 10.4)

T_I	K
-	-
-	-
-	-
-	-
-	-
-	-
-	-

Den "ideala" PID-regulatorn



Algoritmen

$$u(t) = K \left[\underbrace{e(t)}_{P\text{-del}} + \underbrace{\frac{1}{T_I} \int e(t) dt}_{I\text{-del}} + \underbrace{T_D \frac{de}{dt}}_{D\text{-del}} \right]$$

Laplace-transformering ger:

$$U = K \left(E + \frac{E}{T_I \cdot s} + T_D \cdot E \cdot s \right)$$

$$\Rightarrow G_{PID} = K \left[1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s \right]$$

$$\begin{cases} K = \text{förstärkningen} \\ T_I = \text{integrationstiden} \\ T_D = \text{derivatavärdet} \end{cases}$$

Dimensionering av PID-regulatorer

Kombination av metodiken för PI och metodiken för PD-regulatorer.

- ① Bestäm K och T_D enligt metodiken för PD-regulatorer men tag till 11° extra på fasmarginalen när du gör detta!

- ② Fortsätt med metodiken för PI-regulatorer (sista steget) för att bestämma brytpunkten $\frac{1}{T_I}$. $\Rightarrow$ Ger T_I

OBS Ingen tentafråga på denna "kombinerade" metod, utan bara PI-metoden eller PD-metoden.

Industriella PID-regulatorer

- Ideal PID-regulator

$$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K \left(\frac{1 + T_I s + T_I \cdot T_D s^2}{T_I s} \right)$$

- PID-regulator med lågpasfilter

$$G(s) = \frac{K}{(1 + T_F s)} \left(\frac{1 + T_I s + T_I \cdot T_D s^2}{T_I s} \right)$$

(Ger bättre filtrering av högfrekventa mätstörningar)

- PID-regulator på "serieform"

$$G(s) = \frac{K(1 + T_I s)(1 + T_D s)}{(1 + T_F s) \cdot T_I s}$$

Ny variant som börjat förekomma på industriella regulatorer. Bygger på följande approximation:

$$(1 + T_I s)(1 + T_D s) = 1 + (T_I + T_D)s + T_I \cdot T_D s^2 \approx 1 + T_I s + T_I \cdot T_D s^2$$

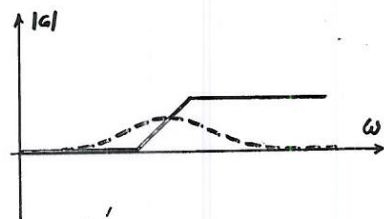
Lead- och lagfilter



Lag-filter

Hög förstärkning
vid låga frekvenser.

Samma fördelar
som en PI-
regulator.
(i princip)



Lead-filter

Hög först. vid
höga frekvenser.

Samma fördelar
som en PD-
regulator.

$$G_{\text{lead}} = \frac{1+bTs}{1+Ts}$$

där $b > 1$

$$G_{\text{lag}} = a \cdot \frac{1+Ts}{1+aTs}$$

där $a > 1$

Kapitel 12

Mer om dimensionering av analoga regulatorer - översikt

Olika varianter av PID-regulatorer, olika PID-strukturer. Fördelar/Nackdelar mm [kap 12.1-12.2]

Processer där PID-reglering inte fungerar så bra [kap 12.3]

- Processer med lång dödtid
- Processer med komplicerad dynamik
- Processer med variabel ö-funktion
- Olineära processer

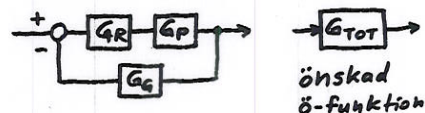
Modellbaserad dimensionering - en alternativ dimensioneringsmetod [kap 12.4]

Reglerprinciper med fler än en givare [kap 12.5]

Modellbaserad dimensionering

- Dim.metod där man talar om hur man vill att den önskade totala överföringsfunktionen G_{TOT} för ett system ska se ut.
- Och där man sedan "bakvägen" räknar ut hur regulatorn ska se ut för att åstadkomma den önskade ö-funktionen.
- Metoden kräver att processens ö-funktion G_P är noggrant bestämd.

EX



- G_P och G_G är kända överföringsfunktioner
- G_R ska beräknas, så att den totala ö-funktionen blir den önskade.

Modellbaserad dimensionering

FÖRDELAR:

- Mycket enkel metod (enkla räkningar)
- Bra för system med små eller obefintliga störningar (t.ex. servo-system, inriktning av robotarmar mm)

NACKDELAR:

- Leder ofta till regulatorer som ej kan realiseras med vanliga "standard komponenter" (PID, Lead-Lag mm)
- Kan leda till en regulator som ej är så bra på att eliminera störningar.
- Metoden fungerar inte för alla typer av processer
 - Ej instabila processer
 - Ej icke-minfas-processer

Processer där modellbaserad dimensionering ej fungerar

- Icke-minfas-processer (processer med "omvänt" stegsvar)



Nollställt i HHP.

Enligt formeln $G_R = \frac{G_{TOT}}{G_P(1-G_{TOT})}$

hamnar nollstället i HHP som en instabil pol i regulatorn.

- ⇒ Överföringsfunktionen från R till U blir därför instabil!
Regulatorn fungerar inte

• Instabila processer

(processer med poler i HHP)



tex $G_p = \frac{1+2s}{1-3s}$

Enligt formeln $G_R = \frac{G_{TOT}}{G_p(1-G_{TOT})}$

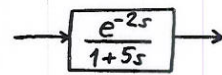
hamnar den instabila polen som ett nollställe i regulatorn.

På samma sätt som för icke-minfas-processer kan man visa att detta leder till en instabil överföringsfunktion från störning V till utsignal Y .

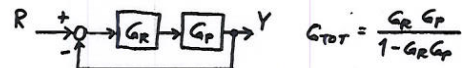
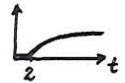
Vidare gäller

- För processer med dödtid kan man aldrig "trolla bort" dödtiden i den totala överföringsfunktionen

G_{TOT} .



Process med dödtd.



⇒ Dödtden måste finnas med i den önskade totala överföringsfunktionen.

Vad händer annars?

Annars kommer den resulterande regulatorn att innehålla ett block e^{+Ls} som kan se in i framtiden (utsignalen kommer före insignalen). Sådana block är tyvärr ännu omöjliga att realisera!

Dimensionering - repetition

- ① TUMREGLMETODER
- Ziegler-Nichols metod
 - Lambda metoden

- ② DIMENSIONERING MED BODEDIAGRAM
- För att få önskade egenskaper $A_m, \phi_m, \omega_c, e_0, e_1, \dots$

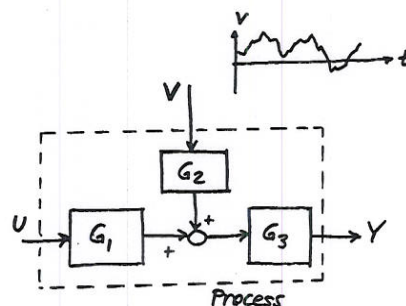
- ③ MODELLBASERAD DIMENSIONERING
- För att få önskad total överföringsfunktion.

OBS Vid all dimensionering är det viktigt att också simulera hur systemet uppför sig vid stegstörningar & börvärdesändringar mm.

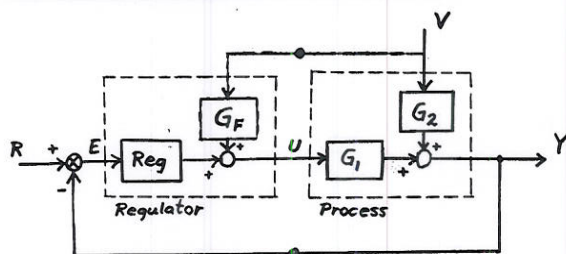
Framkoppling

Specialmetod för eliminering av störningarnas inverkan på en process.

Idé Mät den eller de störningar som påverkar en process och utnyttja denna information för att förbättra regleringen



Regulatorstruktur vid framkoppling



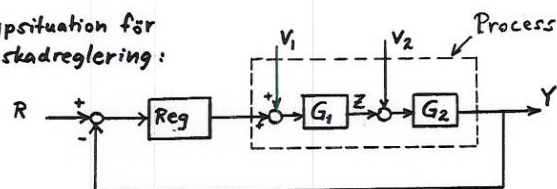
Välj $G_F = -\frac{G_2}{G_1}$

Svårigheter med framkoppling

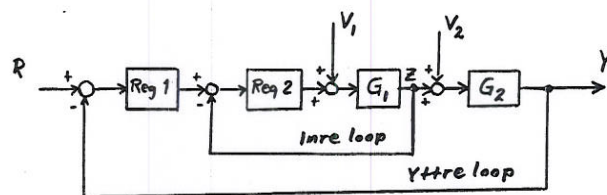
- Störningarna är ofta svåra att mäta (t ex vid kursvinkelreglering, varvtalsreglering mm)
- Ofta förekommer flera typer av störningar
- Det är ibland svårt att tillverka en regulator med önskad överföringsfunktion. Specialtillverkning kan behövas.

Kaskad-reglering

Typsituation för kaskadreglering:



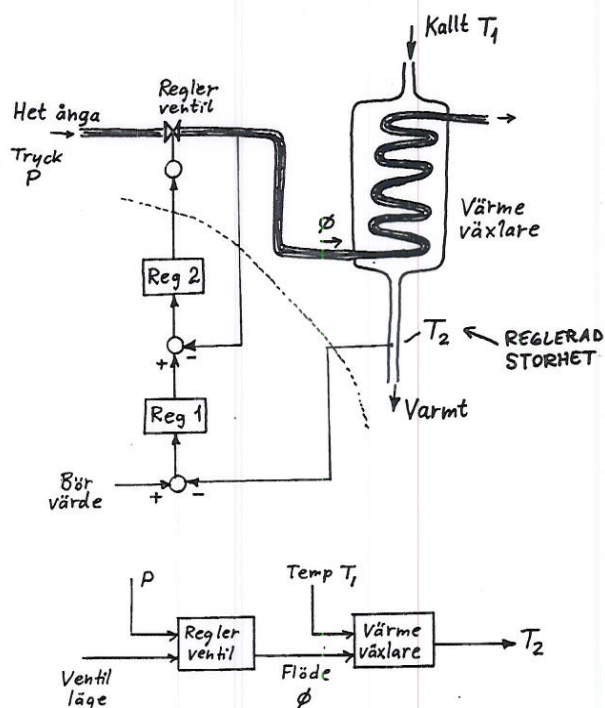
$G_1 = \text{"Snabb" överföringsfunktion, t.ex. } \frac{1}{1+s}$
 $G_2 = \text{"Långsam" -- -- -- -- --, t.ex. } \frac{e^{-10s}}{1+20s}$



Kaskad-reglering

Exempel:

Kaskadreglering av en värmeväxlare



Tillståndsmodeller

Tillståndsmodeller

Tillståndsmodeller är ett tredje sätt att matematiskt beskriva sambandet mellan in- och utsignaler hos dynamiska system.

Tidigare har vi studerat **differentialekvationer** och **överföringsfunktioner**.

Tillståndsmodeller används främst vid modellering och simulering av större system samt vid lösning av mer avancerade reglerproblem, t ex multivariabel reglering (då det kan vara otympligt att arbeta med överföringsfunktioner).

Exempel

Överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{5s+4}{s^2+5s+4}$$

motsvaras av tillståndsmodellen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

där x_1 och x_2 är systemets tillståndsvariabler.

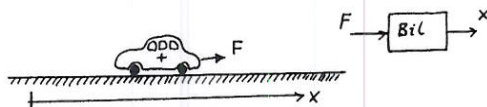
Utgångspunkt

Ett systems tillstånd $x(t)$

Den information som behövs om ett system (vid tidpunkten noll) för att tillsammans med senare insignaler beräkna framtida utsignalvärden (d v s hur systemet uppför sig i framtiden).

Exempel

Bil på en platt väg med en motor som ger kraften F .

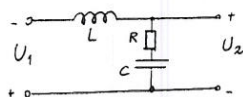


Tillståndsvariabler

- Läget x
- Hastigheten x'

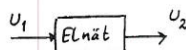
Exempel

Elektriskt system



Tillståndsvariabler

- Strömmen I
- Spänningen U_C



Tillståndsmodeller

En fullständig tillståndsmodell består alltid av två delar

- Ett antal 1:a ordningens diff-ekvationer, som talar om hur tillståndsvariablerna påverkas av andra tillståndsvariabler och av insignalerna. (Skrivs normalt på matrisform)
- En ekvation som beskriver sambandet mellan tillståndsvariabler och utsignaler.

Vanligen gäller att en överföringsfunktion av andra ordningen kan översättas till en tillståndsmodell med två tillståndsvariabler etc.

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{5s+4}{s^2+5s+4}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Tillståndsvariabler

Insignal

Utsignal ekvation

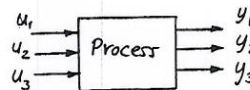
Tillståndsmodeller

Fördelar med tillståndsmodeller i stället för överföringsfunktioner

- Tillståndsmodellen är den naturliga modellformen för många system, speciellt om delarna i systemet beskrivs med 1:a ordningens ö-funktioner.
- Tillståndsmodeller är mkt lämpliga vid simulering (transientberäkning mm) av komplexa system, (både lineära och olineära system).
- Tillståndsmodeller är lämpliga för att lösa mer avancerade reglerproblem, t ex multivariabla reglerproblem och olineära reglerproblem.

Exempel

Antag vi har en process med tre insignaler och tre utsignaler

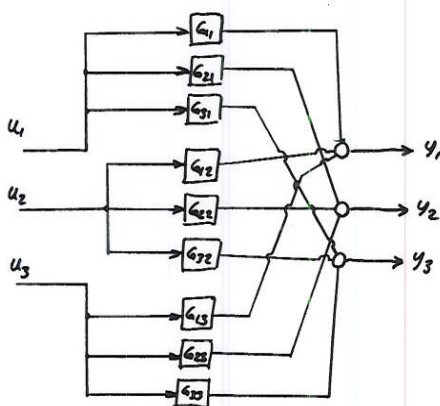


Med en överföringsfunktion från varje insignal till varje utsignal blir det nio (3*3) överföringsfunktioner

Om man däremot beskriver systemet med tillståndsmodeller räcker det med en enda tillståndsmodell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{Systemekvation}$$

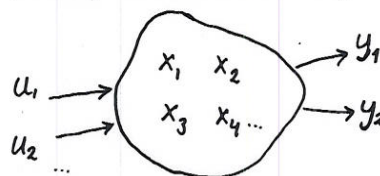
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{Utsignalekvation}$$



Repetition

Tillståndsmodeller = Ett tredje sätt att beskriva sambandet mellan in- och utsignaler hos dynamiska system.

Tillståndet = Den information som behövs om ett system (vid tidpunkten noll) för att tillsammans med senare insignaler kunna förutsäga alla framtida utsignalvärden.



Ex

LINEÄR
TILLSTÄNDS
MODELL:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

På matrisform fås

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$y = C \cdot x$$

där

$$\begin{cases} A = \text{systemmatrisen} \\ B = \text{insignalmatris} \\ C = \text{utsignalmatris} \end{cases}$$

Ex

OLINEÄR
TILLSTÄNDS
MODELL

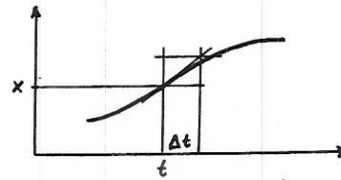
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, u) \end{cases}$$

$$y = g(x_1, x_2, x_3)$$



Datorsimulering av tidsförlopp med tillståndsmodeller

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x \end{cases}$$



$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \dot{x}(t) \cdot \Delta t$$

$$x(t + 2\Delta t) \approx x(t + \Delta t) + \dot{x}(t + \Delta t) \cdot \Delta t$$

$$x(t + 3\Delta t) \approx x(t + 2\Delta t) + \dot{x}(t + 2\Delta t) \cdot \Delta t$$

...

Detta fungerar även för olineära tillståndsmodeller!

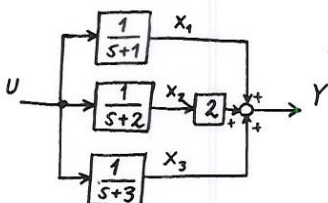
Att gå från överföringsfunktion till tillståndsmodell – allmänna metoder

DIAGONALFORMEN

Antag $G = \frac{4s^2 + 16s + 14}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$



Partialbräksuppdelning ger $G = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}$



Partialbräksuppdelningen motsvarar vidstående block-schema.

$$\frac{x_1}{U} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow x_1(s+1) = U \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\frac{x_2}{U} = \frac{1}{s+2} \Rightarrow x_2(s+2) = U \Rightarrow \dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$\frac{x_3}{U} = \frac{1}{s+3} \Rightarrow x_3(s+3) = U \Rightarrow \dot{x}_3 = -3x_3 + u$$

Tillståndsmodellen blir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Diagonalformen

Fördelar: Vissa typer av beräkningar blir enkla när systemet är beskrevet på diagonalform.

(multiplikation av matriser, invertering av matriser mm.)

Nackdelar: Det krävs en hel del räkningar för att gå från en ö-funktion till diagonalform (partialbräksuppdelning mm.)

Två andra standardformer

- Styrbar kanonisk form
- Observerbar kanonisk form

Fördelar: Med dessa former är det lättare att gå från en ö-funktion till en tillståndsmodell.

Nackdelar: Vissa typer av beräkningar blir krångligare med systemet beskrivet på tillståndsmodell av denna typ.

Formler – styrbar och observerbar kanonisk form

Resultat 8.1. Styrbar kanonisk form

Systemet med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

kan beskrivas på tillståndsform som

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n) x.$$

Resultat 8.2. Observerbar kanonisk form

Systemet med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

kan beskrivas på tillståndsform som

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) x.$$

Linearisering av system på tillståndsform

UTGÅNGSPUNKT:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

OLINEÄRA
TILLSTÄNDS
EKVATIONER

Antag vi vill linearisera vid en arbetspunkt med ett visst värde på insignalen $u = u_0$.

- ① Bestäm arbetspunkten (dvs vilket värde x_1 och x_2 får vid jämvikt om $u = u_0$).

Ekvationer för
bestämning av
 x_{10} och x_{20}

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, u_0) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, u_0) = 0 \end{cases}$$

- ② Gör en Taylorutveckling av f_1 och f_2 kring arbetspunkten, dvs.

$$f_1 \approx f_1(x_{10}, x_{20}, u_0) + \frac{df_1}{dx_1} \Delta x_1 + \frac{df_1}{dx_2} \Delta x_2 + \frac{df_1}{du} \Delta u$$

$$f_2 \approx f_2(x_{10}, x_{20}, u_0) + \frac{df_2}{dx_1} \Delta x_1 + \frac{df_2}{dx_2} \Delta x_2 + \frac{df_2}{du} \Delta u$$

Här gäller att derivatorna ska beräknas i den beräknade arbetspunkten.
Vidare gäller att $f_1(x_{10}, x_{20}, u_0) = f_2(x_{10}, x_{20}, u_0) = 0$ eftersom $[x_{10} \ x_{20} \ u_0]$ är en jämviktspunkt.

- ③ Ställ upp systemet på matrisform.
Använd avvikelse ($\Delta x_1 = x_1 - x_{10}$ resp. $\Delta x_2 = x_2 - x_{20}$) som tillstånd:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{df_1}{du} \\ \frac{df_2}{du} \end{bmatrix} \Delta u$$

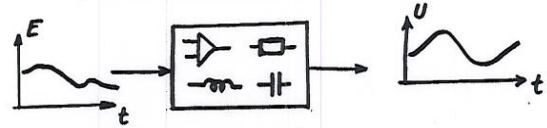
OBS Självklart gäller att $\Delta \dot{x}_1 = \dot{x}_1$ och att $\Delta \dot{x}_2 = \dot{x}_2$ eftersom x_{10} och x_{20} är konstanter

OBS! Allmänna uttryck för linearisering av högre ordningens system finns i kompendiet. Metodiken är dock identisk.

Tidsdiskret reglering

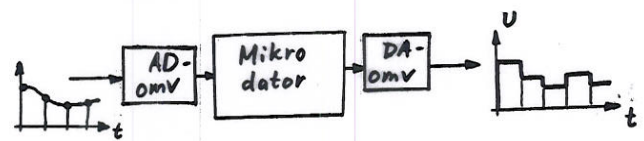
Analog reglering

- Analog reglering är den traditionella formen av reglering.
- Regulatorn är en elektronisk krets byggd med OP-förstärkare, motstånd, spolar, kondensatorer mm.
- Redan på 1950-talet kunde man bygga elektroniska kretsar som fungerar som PID-regulatorer.
- Utsignalen är en kontinuerligt varierande signal.



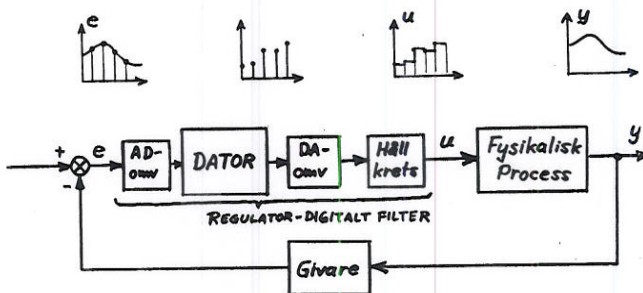
Tidsdiskret reglering

- Tidsdiskret reglering är den moderna formen av reglering
- Huvudkomponenten i regulatorn är en mikrodator med tillhörande program.
- Styrsignalen ändras inte kontinuerligt, utan bara en gång per samplingsintervall.



Tidsdiskret reglering

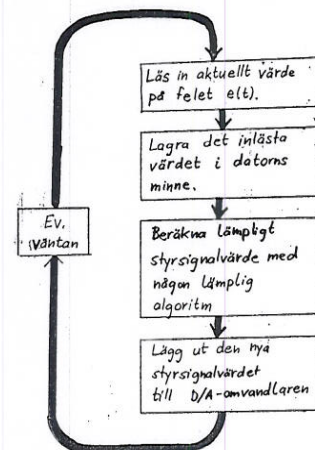
Reglering där styrsignalen endast ändras vid diskreta tidpunkter (datorreglering, digital reglering).



Frågor:

- Hur ska algoritmerna se ut då man implementerar analoga regulatorer (t ex PID) med en dator?
- Finns det speciella regleralgoritmer speciellt avsedda för tidsdiskret reglering?
- Hur beräknas egenskaper hos tidsdiskreta system?

Flödesschema för ett reglerprogram i en dator



$$u(t) = f[e(t), e(t-T), e(t-2T) \dots u(t-T), u(t-2T) \dots]$$

Övrigt som datorn gör:

Signalbehandling, skalning, presentation av mätvärden, larmhantering mm.

Fördelar med datorreglering

1. Kan ofta ge bättre reglering för komplicerade processer (olineära, multivariabla mm)
2. Regleralgoritmerna kan lätt ändras
3. Ger möjlighet till bättre presentation (minnen, bildskärmar mm)
4. Ger möjligheter till mer avancerad signalbehandling
5. En dator kan reglera flera processer samtidigt

Typiska samplingstider

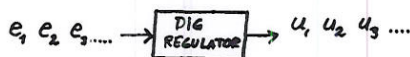
- Temperaturreglering i bostadshus 1-2 min.
- Kursvinkelreglering på fartyg 1-5 sek.
- Varvtalsreglering, små motorer ~ 0,5 sek.
- Autopiloter för jaktflygplan ~ 0,02 sek.
- Positionsreglering av kranar ~ 0,2 sek
- Nivåreglering i stora behållare ~ 10 sek

• För lång samplingstid kan leda till instabilitet och dålig reglering.

• För kort samplingstid kan medföra onödigt slitage på styrdon.

• Samplingstiden bör väljas i förhållande till processens stigtid t_r .
[Ofta väljes ca 10% av t_r som samplingstid]

Hur ska algoritmen se ut i en tidsdiskret regulator?



Svar: I praktiken används nästan uteslutande s.k. linjära differens-ekvationer

$$u(k) = a_1 u(k-1) + a_2 u(k-2) + \dots + b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + b_2 e(k-2) + \dots$$

Varför det ?

- Beräkningarna blir synnerligen enkla om linjära differenskvationer används. (Z-transformen kan användas)
- Digitala filter med linjära differenskvationer har en hel del intressanta egenskaper (bl.a. frekvensegenskaper)
- Det kan visas att bättre reglering ej kan fås med andra reglerprinciper vid reglering av linjära processer.

Digitala filter - allmänt



$$y(k) = 0,5 y(k-1) + 0,1 y(k-2) + 2 u(k-1) + u(k-2)$$

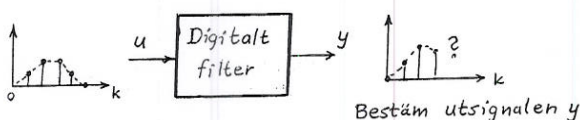
Linjär differenskvation



Användningsområden

- Brusfiltrering av mätsignaler
- Bandpassfiltrering vid telefoni
- Trendanalys
- Talanalys / Talsyntes
- Signalbehandling
- Digitala regulatorer

Beräkning av tidsförlopp i samplade system (tidsdiskret standardproblem)



Lösningsmetod

1. Bestäm insignalens z-transform $U(z)$
2. Bestäm filtrets digitala överföringsfunktion $H(z)$
3. Bestäm utsignalens z-transform $Y(z)$ enligt regeln

$$Y(z) = U(z) \cdot H(z)$$

4. Inverstransformera för att få motsvarande tidsfunktion $y(k)$ [med tabell och ev partialbråksuppdelning]

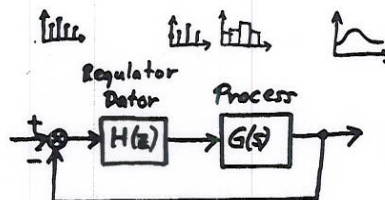
$$\Rightarrow y(k)$$

Alternativ lösningsmetod

Använd differensekvationen och lös problemet "för hand" med iterativa beräkningar.

Diskretisering

Problem vid beräkningar på tidsdiskreta reglersystem:



Datorn

Beskrivs matematiskt med differens-ekvationer (z-transformer, tidsdiskreta ö-funktioner)

Processen

Beskrivs med differentialekvationer (Laplace-transformer, analoga ö-funktioner)

Lösning:

Vid beräkningar på tidsdiskreta reglersystem måste man först diskretisera processen.

Diskretisering - allmänt

Omskrivning av en kontinuerlig överföringsfunktion till en tidsdiskret motsvarighet



Man försöker hitta en tidsdiskret ö-funktion som har ungefär samma egenskaper som den analoga ö-funktionen (samma insignal ska alltså ge ungefär samma utsignal).

Varför "ungefär" samma dynamik??

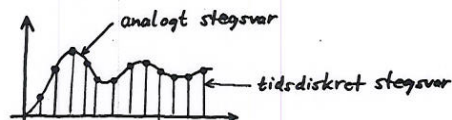
- Ett tidsdiskret filter reagerar inte på det som händer mellan samplingsögonblicken.
- Man kan därför inte hitta ett tidsdiskret filter med exakt samma frekvensegenskaper som ett analogt filter.
- Man kan därför inte heller bygga ett tidsdiskret filter som har exakt samma egenskaper i övrigt som ett analogt filter (stegsvar, impulssvar mm).

Slutsats: Alla metoder för diskretisering är approximativa.

I reglertekniken används följande två diskretiseringsmetoder:

1. Steginvariant transform

Används för diskretisering av processer. (Detta görs för att kunna göra beräkningar på egenskaper hos tidsdiskreta reglersystem)



2. Bilineär transform

Bredbandig transformmetod som används för diskretisering av regulatorer. (Detta görs för att dimensionera tidsdiskreta regulatorer utgående från analoga regulatorer)

Andra metoder:

- Impulsinvariant transform
- Rampinvariant transform mm

Steginvariant transform

Man bestämmer den överföringsfunktion $H(z)$ som har samma stegsvar som den analoga överföringsfunktionen $G(s)$ (i samplingsögonblicken)

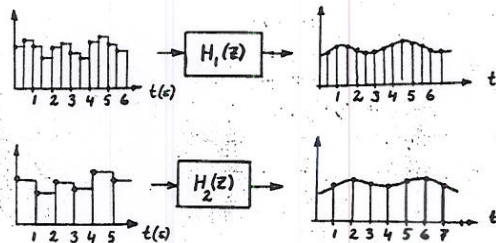
Detta kan göras på flera sätt:

1. Med en generell formel

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \right]_{t=kh}$$

2. Med tabellen i läroboken (sid 516)

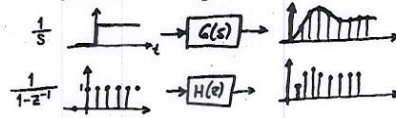
3. Med Matlab



OBS! Utseendet på $H(z)$ beror på längden av samplingsintervallet.

Diskretiseringsformeln - Bevis

PROBLEM Vi söker en tidsdiskret överföringsfunktion $H(z)$ som vid samplingsögonblicken har samma stegsvar som den analoga δ -funktionen



Stegsvarets transform:

$\frac{G(s)}{s}$	Analogt fall
$\frac{H(z)}{(1-z^{-1})}$	Digitalt fall

Stegsvarets värden i samplingsögonblicken:

$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right]_{t=kh}$	Analogt fall
$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{H(z)}{1-z^{-1}} \right]$	Digitalt fall

Likhet ger

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{H(z)}{1-z^{-1}} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right]_{t=kh}$$

Z-transformering av båda led ger:

$$H(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \right]_{t=kh}$$

Diskretisering med Matlab

```

> G=tf([1],[1 0.5 1])
Transfer function:
      1
-----
s^2 + 0.5 s + 1

```

inmatning, kontinuerlig δ -funktion

```

> step(G)
> H=c2d(G,0.5)

```

stegsvaret

diskretisering med $h=0.5$

```

Transfer function:
  0.1129 z + 0.1038
-----
z^2 - 1.562 z + 0.7788

```

resultat

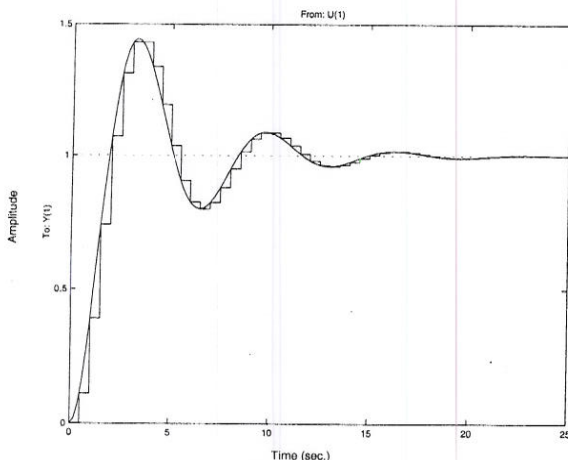
Sampling time: 0.5

```

> hold
> Current plot held
> step(H)

```

stegsvar för tidsdiskret modell



Tidsdiskreta Bodediagram

Används mkt sällan, på grund av följande anledningar:

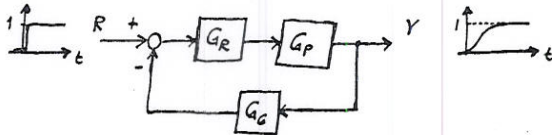
- ① Egenskaperna kan bestämmas på annat sätt
- ② Det är svårare att rita Bodediagram i det digitala fallet
- ③ De vanligaste dimensioneringsmetoderna kräver ej Bodediagram

Lågfrekvensförstärkning K_{LF}

= samma som statisk förstärkning

$$K_{LF} = \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(e^{j\omega h})| = |H(e^0)| = H(1)$$

dvs. den statiska förstärkningen för ett digitalt system fås genom att byta ut alla z mot 1 i överföringsfunktionen.



$$H_{tot} = \frac{G_R \cdot G_P}{1 + G_R \cdot G_P \cdot G_G}$$

För ett slutet reglersystem H_{tot} önskar man alltid att $K_{LF} = 1$.

Metoder för stabilitetsbestämning i det tidsdiskreta fallet

1. Polbestämning
2. Det förenklade Nyquist-kriteriet
3. Schur-Coons stabilitetskriterium

OBS!

Metod 2 fungerar på samma sätt som i analoga fallet.

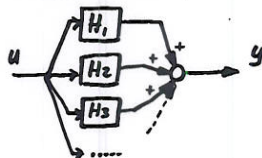
Metod 3 motsvarar Rouths metod i det analoga fallet

Dynamik och snabbhet

- En överföringsfunktion $H(z)$ kan alltid partialbråksuppdelas i en summa av termer av första och andra ordningen:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + H_3(z) + \dots$$

- Partialbråksuppdelningen motsvarar alltid ett blockschema med parallellkopplade delar



Slutsats

Överföringsfunktionen H 's stegsvar kan alltid skrivas som en summa av stegsvar för block av första och andra ordningen.

$$y(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t) + \dots$$

Dimensionering av tidsdiskreta regulatorer – två huvudmetoder

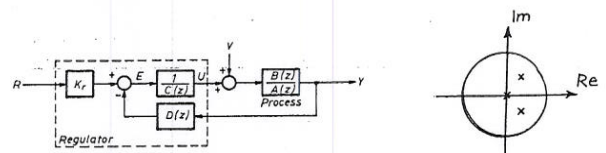
1. Transformering av analoga överföringsfunktioner

- Dimensionera först en analog regulator
- Transformera sedan överföringsfunktionen för denna regulator till en tidsdiskret motsvarighet



2. Direkt dimensionering av digitala regulatorer

- Vi använder speciella "digitala" metoder och tar inte "omvägen" över en analog regulator.
- Exempel: Polplaceringsmetoden (vanlig digital metod)

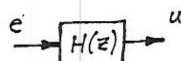


Transformerering av analoga överföringsfunktioner

Analog regulator
(dimensionerad med analog metod)



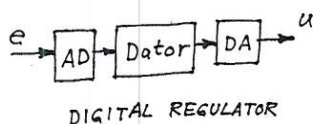
Tidsdiskret överföringsfunktion



Differens-ekvation

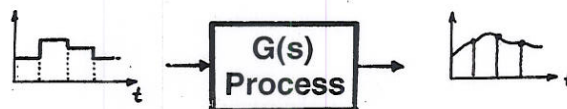
$$u(k) = a_1 \cdot u(k-1) + a_2 \cdot u(k-2) + \dots + b_1 \cdot e(k) + b_2 \cdot e(k-1) + \dots$$

(att programmera in i en tidsdiskret regulator)

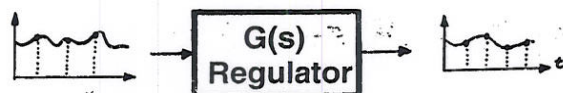


Viktigt

Vid diskretisering av regulatorer ska man inte använda samma diskretiseringsmetod som för processer.



⇒ Steginvariant transform



⇒ Bilineär transform

Varför?

Vi behöver en metod som är bra på insignaler av alla frekvenser.

Bilineär transform

Metod som ger en bra överensstämmelse inte bara för stegformade insignaler utan även för insignaler som varierar mellan samplingsintervallen.

[Frekvenskurvorna för $G(s)$ och $H(z)$ stämmer bättre överens]

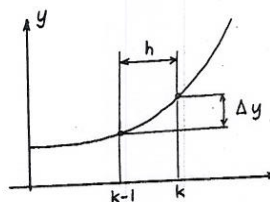
Metod:

Byt alla s i överföringsfunktionen mot

$$s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)}$$

h = samplingsintervallet

Bevis – Bilineär transform



Låt V vara derivatan av funktionen y dvs

$$V = y' \Rightarrow V = s \cdot Y$$

Derivatan mellan $k-1$ och k är

$$y' \approx \frac{y(k) - y(k-1)}{h}$$

Denna derivata kan ses som medelvärdet av derivatorna vid tidpunkten k och $k-1$

$$\text{dvs} \quad \frac{V(k) + V(k-1)}{2} \approx \frac{y(k) - y(k-1)}{h}$$

Z -transformering av detta uttryck ger nu

$$V \cdot \frac{(1+z^{-1})}{2} \approx \frac{(1-z^{-1})}{h} Y$$

Vilket ger

$$V \approx \frac{2(1-z^{-1})}{h(1+z^{-1})} Y$$

Men vi har redan

$$V = s \cdot Y$$

Jämförelse av dessa båda samband ger

$$s \rightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{h(1+z^{-1})}$$

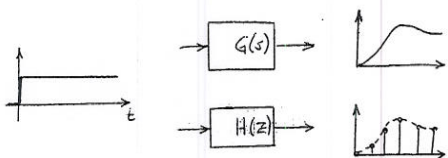
Transformerings av analoga överföringsfunktioner

Fråga

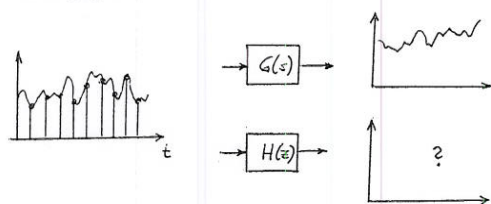
Är det möjligt för ett diskret filter att ge exakt samma utsignal som ett analogt filter för samma insignal?

Svar

För vissa insignaler (t ex stegfunktioner) så är det möjligt



Men om man har en komplex insignal så är det inte möjligt



Slutsats

Man kan aldrig konstruera en digital regulator (eller ett digitalt filter) som har exakt samma egenskaper som en analog regulator

Alla diskretiseringsmetoder är approximationer

Några olika diskretiseringsmetoder

Steginvariant transform

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right)_{t=kh} \right]$$

Impulsinvariant transform

$$H(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} (G(s))_{t=kh} \right]$$

Euler-transformen

Byt alla s mot $s = \frac{z-1}{zh}$

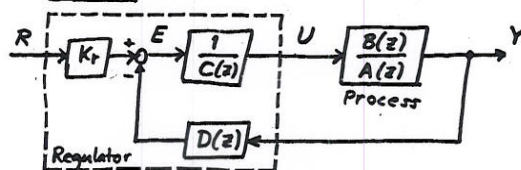
Bilineär transform

Byt alla s mot $s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)}$

Polplaceringsmetoden

Ett sätt att dimensionera en regulator så att systemet får önskade pder. (Polerna är avgörande för systemets egenskaper)

Struktur



Polplaceringsekvationen:

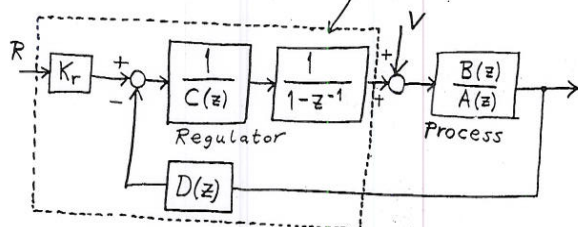
$$CA + BD = P \quad (\text{polynomekv.})$$

$$K_r = \frac{P(1)}{B(1)}$$

Ger i sin tur en ekvation för varje gradtal

Polplacering med integralverkan

För att eliminera kvarstående fel vid stegstörningar ska regulatorn innehålla en integrerande faktor



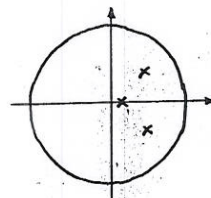
Vid räkningarna låtsas man att I-faktorn tillhör processen, dvs

$$A' = A(z) \cdot (1 - z^{-1})$$

vilket ger gradtalsreglerna:

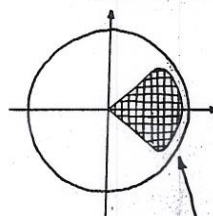
$$\begin{cases} n_p = n_A + n_B \\ n_c = n_B - 1 \\ n_d = n_A \end{cases}$$

Polplaceringsmetoden



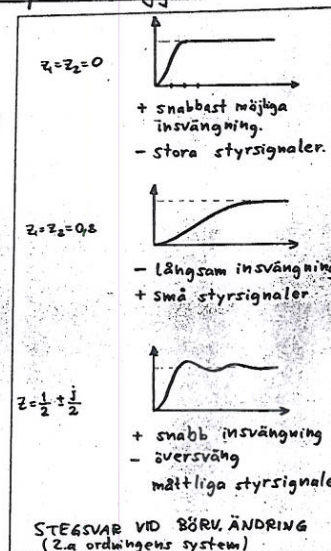
Ett sätt att dimensionera en regulator så systemet får önskade poler! (Polerna är avgörande för systemets egenskaper)

Var skall polerna ligga?



Polerna placeras normalt här

Se vidare s. 299 och s. 302 i boken!



Jämförelse mellan PID-regulatorer och polplaceringsregulatorer

PID-regulatorn

- Mycket vanlig i traditionell processindustri, (raffinaderier, pappersmasseindustri, kraftverk, petrokemi, livsmedel, stålverk mm)
- Kommersiella PID-regulatorer tillgängliga i stor mängd (bla mikrodatorbaserade)
- Många nya PID-regulatorer är mer avancerade än tidigare (innehåller olika extra finesser för att förbättra regleringen)

Pol-regulatorn

- Mest vanlig för reglersystem inbyggda i produkter (inbyggda datorsystem), tex reglersystem i elmotorer, industrirobotar, kranar, radarantennar, flygplan (autopiloter), bilmotorer, tvättmaskiner, ABS-bromsar, elkraftsystem mm.
- Digital reglermetod. Lämplig att kombinera med minsta-kvadrat-identifiering.
- Kommersiella produkter ej tillgängliga i stor mängd.

1 Återkopplingsprincipen

- Hur den fungerar
- Hur viktig den är för alla möjliga typer av avancerade tekniska system.

Exempel:

Bilar

- ABS-bromsar
- Antisladd-system
- Farthållare
- Antislirsystem
- Motorreglersystem

Fartyg/Flygplan

- Autopiloter
- Höjdregering
- Klimatreglering

Robotar

- Industrirobotar
- Humanoider

Övrigt

- Mänslandare / Raketer / Satelliter
- Fastighetsautomation
- Klimatreglering mm

Fabriker

- Temperatur
- Tryck
- Flöde
- Koncentration
- Varvtal

Tillverkande industri

- Positionsreglering
- Varvtalsreglering

Produkter

- CD-spelare
- Telefoner
- Segways mm mm

Militära system

- Jaktflygplan
- Målsökande robotar
- Styrning av kanoner

2 Reglerprinciper och hur dom fungerar

PID-regulatorer

- P-verkan
- I-verkan
- D-verkan
- Fördelar och nackdelar med PID

Tidsdiskreta regulatorer

- Differensekvationer
- Bilineär transform

Övrigt

- Framkoppling
- Kaskadreglering
- Tvålägesreglering

3 Dimensioneringsmetoder för regulatorer

- Tumregelmetoder
 - Ziegler-Nichols metod
 - Lambda-metoden
- Modellbaserad dimensionering
- Dimensionering med Bodediagram

4 Känsla för dynamik hos återkopplade system

- Förståelse att återkopplade system kan bli instabila
- Att det ofta är motsättningar mellan snabbhet och stabilitet
- Något om störningsdämpning

5 Känsla för processer

- Samband mellan stegsvar och överföringsfunktion för enkla processer
- Begrepp: tidskonstant, översväng, dödtid, processer med integration, instabila processer mm

6 Övriga viktiga nya saker

- Blockschematransformering
- Simulink och Matlab Control Toolbox
- Kunskap om givare, praktiska regulatorer mm
- Hur man ställer upp matematiska modeller för olika processer (tillståndsmodeller mm)