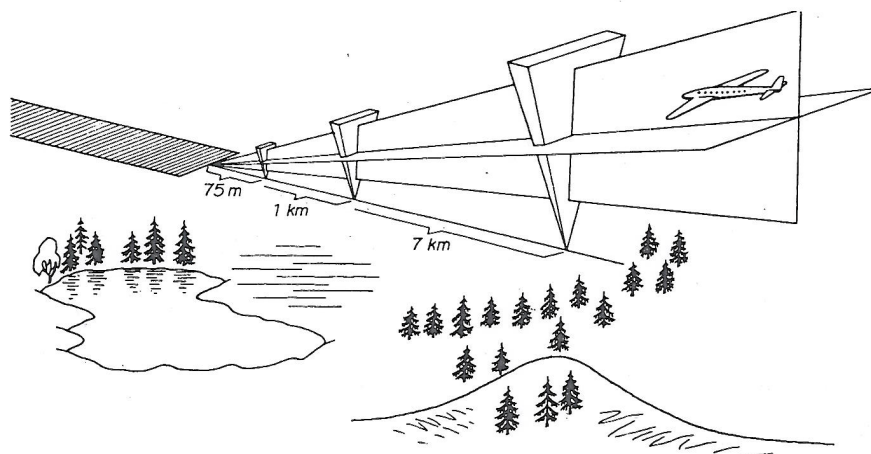
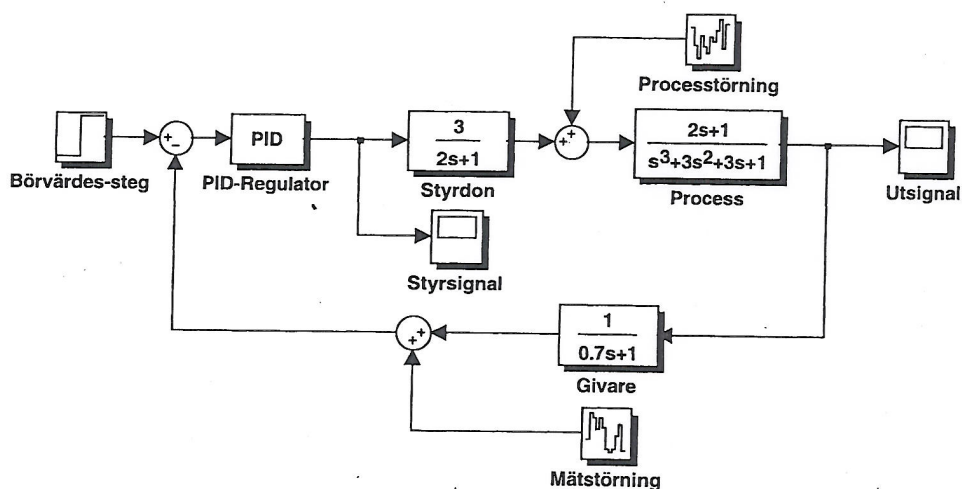
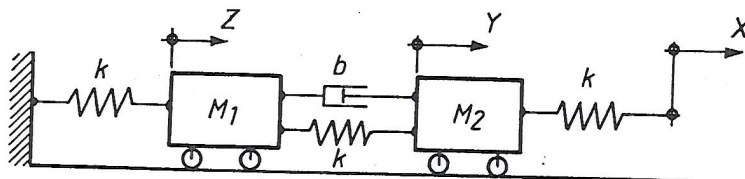


LÖSNINGAR – ETT URVAL

Modern Reglerteknik Bertil Thomas



Lösningar – Ett urval

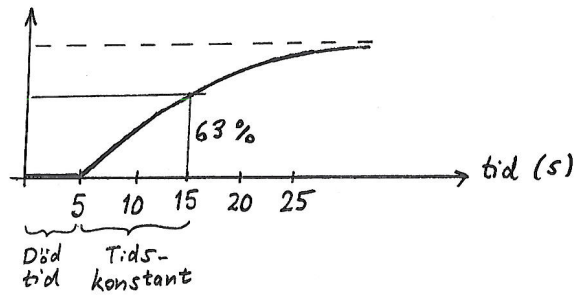
Detta häfte innehåller fullständiga lösningar till ca 100 av uppgifterna i övningsboken till Modern reglerteknik. Inte alla – men tillräckligt många för att kunna lösa övriga uppgifter utan större problem.

Häftet ska ses som ett hjälpmedel för den som studerar och försöker lösa problem.

Lösta uppgifter i detta häfte

1		6	1, 3, 5d-e, 6d, 7d, 8a,c,e, 9b, 11, 13, 14b	11	2, 3, 6, 9, 11, 12, 15, 16, 17	16	1a-c, 3, 4a-b, 5a,d, 6a-b, 8a,
2		7	1b, 2, 4, 7, 9, 12, 15, 17a-c, 19	12	4, 6, 8, 10, 11	17	1b,e, 3, 5, 8
3	4, 6a	8	2, 3, 4, 5, 7, 10	13		18	1a, 3a, 4a- b, 6c,e, 7a- b, 9b
4	4, 6	9	1, 4, 5, 8e, 10, 11	14	1, 3, 4, 6a, 7, 8, 10, 13, 15	19	1, 2, 5, 9, 6 13
5		10	1, 3, 4, 8, 9, 10, 11a, 15, 16, 21, 22, 24, 25	15		20	

3.4



4.4

$$u = 120 + 2,5e + 3e'$$

a) $u = 120$

b) $u = 120 + 3 \cdot 2 = 126$

c) $u = 120 + 3(-2) = 114$

d) $u = 120 + 2,5 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 138,5$

3.6 a En process med en tidskonstant har stegsvaret

$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$, där T är tidskonstanten och K är slutvärdet.

Vi vet att $y(12) = 0,5 \cdot K$, dvs

$$(1 - e^{-12/T}) = 0,5$$

$$\Rightarrow e^{-12/T} = 0,5$$

$$\Rightarrow -\frac{12}{T} = \ln 0,5$$

$$\Rightarrow T = \frac{-12}{\ln 0,5} = 17,3$$

3.6 b På samma sätt som ovan fås

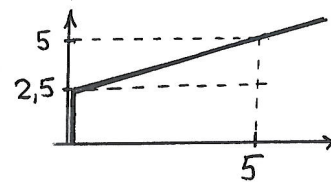
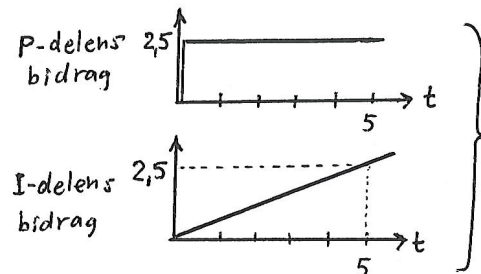
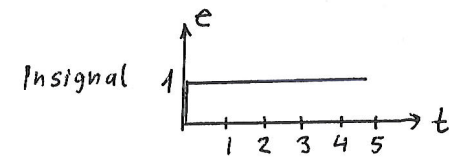
$$y(10) = K(1 - e^{-10/T}) = 0,9 K$$

$$\Rightarrow e^{-10/T} = 0,1$$

$$\Rightarrow -\frac{10}{T} = \ln 0,1 \quad \Rightarrow T = \frac{-10}{\ln 0,1} = 4,34 \text{ min}$$

$$\underline{4,6} \quad u(t) = K \left(e + \frac{1}{T_I} \int_0^t e \, dt \right) = 2,5 \left(e + \frac{1}{5} \int e \, dt \right) =$$

$$= 2,5 e + 0,5 \int e \, dt$$



Sammanlagd kurva
(PI-regulatorns stegsvar)

$$\underline{6.1} \quad a) \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} \, dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} \, dt =$$

$$= \left[\frac{-e^{-(a+s)t}}{a+s} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{a+s} \right) = \frac{1}{a+s}$$

- b) Signalen kan ses som summan av två stegfunktioner, en vid tiden T och en (negativ) vid $T+1$. Det ger

$$f(t) = \sigma(t-T) - \sigma(t-(T+1))$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-T} - \frac{1}{s} \cdot e^{-(T+1)} = \frac{e^{-T} - e^{-T-1}}{s}$$

- c) Fördröjningsratsen ger

$$F(s) = e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$\nearrow$ Fördröjning $\nwarrow$ Rampfunktion

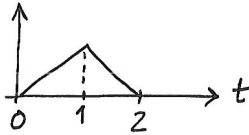
- e) Signalen är summan av två rampfunktioner, en vid tiden $t=0$ och en (negativ) vid tiden $t=1$. Det ger

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot e^{-s} = \frac{1 - e^{-s}}{s^2}$$

6.3

En enda triangelimpuls kan skrivas:

$$f(t) = g(t) - 2g(t-1) + g(t-2)$$



vilket ger:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}$$

För en oändlig sågtalesfunktion fås:

$$\begin{aligned} \bar{F}(s) &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \cdot (1 + e^{-2s} + e^{-4s} + e^{-6s} + \dots) = \\ &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \cdot [(e^{-2s})^0 + (e^{-2s})^1 + (e^{-2s})^2 + \dots] = \\ &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \cdot \frac{1}{1-e^{-2s}} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2(1-e^{-2s})} \end{aligned}$$

6.5

d) $y'' - 3y' + 2y = 3x' + x$

Laplace-transformering ger:

(OBS! Alla begynnelsekällstånd sätts till 0 i enlighet med definitionen på överföringsfunktioner)

$$Ys^2 - 3Ys + 2Y = 3Xs + X$$

$$\Rightarrow Y(s^2 - 3s + 2) = X(3s + 1)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{3s + 1}{s^2 - 3s + 2}$$

e) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{x} - 3x$

$$\Rightarrow Ys^2 + 3Ys + 2Y = Xs - 3X$$

$$\Rightarrow Y(s^2 + 3s + 2) = X(s - 3)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{s - 3}{s^2 + 3s + 2}$$

6.6

a) $y = x + 5 \int x dt + 2\dot{x}$

$$\Rightarrow Y = X + 5 \cdot \frac{X}{s} + 2Xs$$

$$\Rightarrow Y = X \left(1 + \frac{5}{s} + 2s \right)$$

$$\Rightarrow G(s) = 1 + \frac{5}{s} + 2s = \frac{2s^2 + s + 5}{s}$$

6.6 d $y' + y = 2x(t-10)$

$$\Rightarrow Ys + Y = 2X \cdot e^{-10s} \quad (\text{enligt fördröjningsatsen})$$

$$\Rightarrow Y(s+1) = 2X e^{-10s}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{2e^{-10s}}{1+s}$$

6.7 d $G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{s+4}{2s^2+3}$

Inverstransformering ger:

$$Y(2s^2+3) = U(s+4)$$

$$\Rightarrow 2Ys^2 + 3Y = Us + 4U$$

$$\Rightarrow 2y'' + 3y = u' + 4u$$

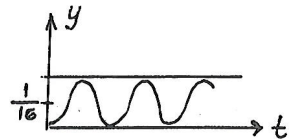
6.8 a Stegsvaret = svaret på stegformad.
 insignal $\Rightarrow$ insignalen är ett steg, $U = \frac{1}{s}$.

$$U = \frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2+16}} \longrightarrow Y$$

Utsignalens transform $Y = U \cdot G = \frac{1}{s(s^2+16)}$

Lapacetransform-tabell ger nu (sätt $a=4$)

$$y = \frac{1}{16} (1 - \cos 4t) \quad t > 0$$

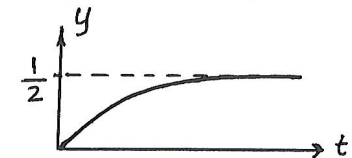


6.8 c Med samma metod som ovan fås:

$$Y = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{(s+0)(s+2)}$$

Tabell ger: $y = \frac{e^{-0t} - e^{-2t}}{2-0} = 0,5(1 - e^{-2t}) \quad t > 0$

{sätt $a=0$
 $b=2$ }



FIGUR

6.8 e

Utsignalens transform blir

$$Y = U \cdot G = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

Detta uttryck finns inte i tabellen.

Vi måste partialbråksuppdelna:

Partialbråks
uppdelning
ger:

$$Y = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s(s+1)}$$

Inverstransformering ger nu

$$y(t) = t - (1 - e^{-t}) \quad t > 0$$

6.9 b

Impulssvaret = svaret på impulsförmod

insignal $\Rightarrow$ insignalen är en impulsfunktion $U=1$

$$Y = U \cdot G = \frac{1+s}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4}$$

Inverstransformering med tabell ger: ($a=2$)

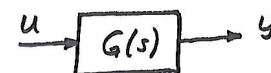
$$y(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) + \cos(2t)$$

6.11

$$2\ddot{y} + \dot{y} = u$$

$$\Rightarrow 2Ys^2 + Ys = U \Rightarrow Y(2s^2 + s) = U$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{s(2s+1)}$$



$$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(2s+1)} = \frac{1}{s^2(2s+1)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Partialbråks} \\ \text{uppdelning} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s(2s+1)}$$

Tabell ger:

$$y(t) = t - 2(1 - e^{-0,5t})$$

6.13 $G(s) = \frac{2}{s^2 + 0,96s + 2}$

Jämför med standarduttrycket $G = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$

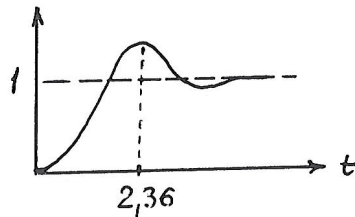
Vi får $\omega_0^2 = 2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}$

$2\zeta\omega_0 = 0,96 \Rightarrow \zeta = \frac{0,96}{2\omega_0} = \frac{0,96}{2\sqrt{2}} = 0,34$

Bokens formler ger nu (avsnitt 6.4):

Max översväng $M_p = 100 \cdot \exp \frac{-0,34 \cdot \pi}{\sqrt{1-0,34^2}} = 32 \%$

Tid för max översväng $t_p = \frac{\pi}{\sqrt{2} \sqrt{1-0,34^2}} = 2,36$



6.14 b $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = u' + 4u$
 $\Rightarrow Ys^3 + 6Ys^2 + 11Ys + 6Y = Us + 4U$

$\Rightarrow Y(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = U(s + 4)$

$\Rightarrow G = \frac{Y}{U} = \frac{s+4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \left\{ \begin{array}{l} \text{faktorisering} \\ \text{ger} \end{array} \right\} = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

Poler = rötter till nämnaren = -1, -2 och -3

Nollställen = - till täljaren = -4

Statisk förstärkning

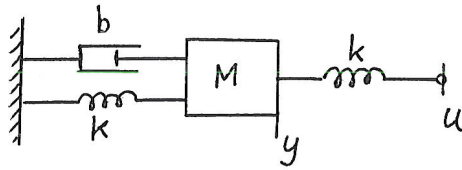
$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Omskrivning
ger:

$G(s) = \frac{(s+4)}{(1+s)(1+0,5s)(1+0,333s) \cdot 6}$

Tidskonstanterna är $\begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = 0,5 \\ T_3 = 0,333 \end{cases}$

7.1 b)



Newtons andra lag för massan ger:

$$\Rightarrow: \Sigma F = M \ddot{y}$$

$$k(u-y) - ky - b\dot{y} = M \ddot{y}$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + 2ky = ku$$

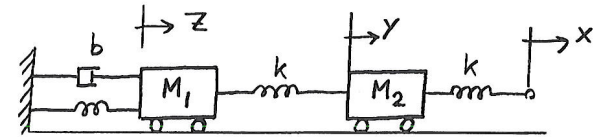
Laplacetransformering ger:

$$MYs^2 + bYs + 2kY = kU$$

$$Y(Ms^2 + bs + 2k) = kU$$

$$\Rightarrow G = \frac{Y}{U} = \frac{k}{Ms^2 + bs + 2k}$$

7.2



Newtons andra lag ger:

$$\text{Massa } M_1: k(y-z) - kz - b\dot{z} = M_1 \ddot{z} \quad (1)$$

$$\text{Massa } M_2: k(x-y) - k(y-z) = M_2 \ddot{y} \quad (2)$$

Laplacetransformering ger:

$$\begin{cases} k(Y-Z) - kZ - bZs = M_1 Zs^2 & (1) \\ k(X-Y) - k(Y-Z) = M_2 Ys^2 & (2) \end{cases}$$

Eliminering av mellanvariabeln Y ger

$$(2) \Rightarrow M_2 Ys^2 + 2kY = kX + kZ$$

$$Y(M_2 s^2 + 2k) = kX + kZ$$

$$Y = \frac{kX + kZ}{M_2 s^2 + 2k}$$

Insättning samt omflyttning av termer i ekv (1) ger:

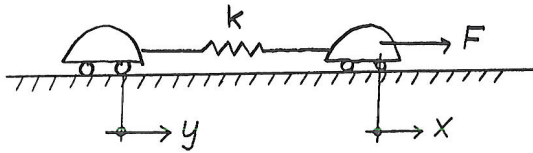
$$k \left[\frac{kX + kZ}{M_2 s^2 + 2k} \right] = M_1 Zs^2 + bZs + 2kZ$$

$$\Rightarrow k^2 X = (M_2 s^2 + 2k)(M_1 Zs^2 + bZs + 2kZ) - k^2 Z$$

$$\Rightarrow k^2 X = (M_1 M_2 s^4 + M_2 b s^3 + 2k(M_1 + M_2)s^2 + 2kbs + 3k^2)Z$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Z}{X} = \frac{k^2}{M_1 M_2 s^4 + M_2 b s^3 + 2k(M_1 + M_2)s^2 + 2kbs + 3k^2}$$

7.4



$$\text{Bil 1} \quad F - k(x-y) - b\dot{x} = m_1 \ddot{x} \quad (1)$$

$$\text{Bil 2} \quad k(x-y) - b\dot{y} = m_2 \ddot{y} \quad (2)$$

Antag att
fjädern har
sin naturliga
längd då
 $x-y=0$

Laplacetransformering ger

$$\begin{cases} \bar{F} - kX + kY - bXs = m_1 Xs^2 & (1) \\ k(X-Y) - bYs = m_2 Ys^2 & (2) \end{cases}$$

Eliminering av X ger

$$(1) \Rightarrow X(m_1 s^2 + bs + k) = \bar{F} + kY$$

$$\Rightarrow X = \frac{\bar{F} + kY}{m_1 s^2 + bs + k}$$

Insättning i ekv (2) ger:

$$(2) \Rightarrow \frac{k(\bar{F} + kY)}{m_1 s^2 + bs + k} = m_2 Ys^2 + bYs + kY$$

$$\Rightarrow k\bar{F} + k^2 Y = (m_2 Ys^2 + bYs + kY)(m_1 s^2 + bs + k)$$

$$\Rightarrow k\bar{F} + k^2 Y = Y [m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)bs^3 + (km_2 + b^2 + km_1)s^2 + \dots + 2kbs + k^2]$$

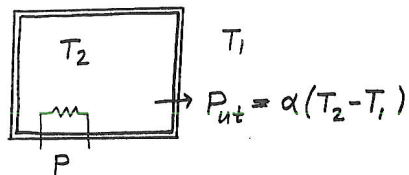
$$\Rightarrow k\bar{F} = Y [m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)bs^3 + (km_2 + b^2 + km_1)s^2 + 2kbs]$$

Eftersom $V_2 = \dot{y}$ gäller att $V_2 = Ys$ som ger:

$$k\bar{F} = V_2 (m_1 m_2 s^3 + (m_1 + m_2)bs^2 + (km_2 + b^2 + km_1)s + 2kb)$$

$$\Rightarrow G = \frac{V_2}{\bar{F}} = \frac{k}{m_1 m_2 s^3 + b(m_1 + m_2)s^2 + (km_2 + b^2 + km_1)s + 2kb}$$

7.7



Värmebalans ekvationen ger

$$\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut} \quad \text{där } E = VT_2 \rho c$$

$$\Rightarrow V \rho c \frac{dT_2}{dt} = P - \alpha(T_2 - T_1)$$

$V \rho c$ har brytits ur
derivatan eftersom
det är konstanter

Med siffror fås

$$25 \frac{dT_2}{dt} + 0,05 T_2 = P + 0,05 T_1$$

Laplace transformering ger

$$25 \bar{T}_2 s + 0,05 \bar{T}_2 = \bar{P} + 0,05 \bar{T}_1$$

$$\Rightarrow \bar{T}_2 (25s + 0,05) = \bar{P} + 0,05 \bar{T}_1$$

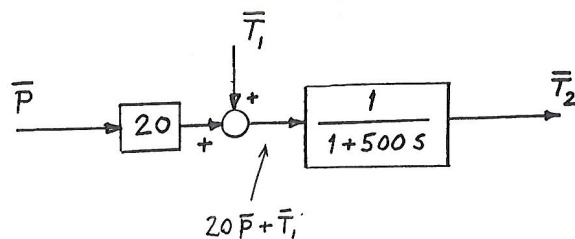
Multiplikation med 20 ger

$$\bar{T}_2 (1 + 500s) = 20 \bar{P} + \bar{T}_1$$

eller

$$\bar{T}_2 = (20 \bar{P} + \bar{T}_1) \cdot \frac{1}{1 + 500s}$$

Vilket motsvarar blocksschemat



7.3

Lösningen finns i läroboken sid 99

7.8

Lösningen görs på samma sätt som 7.7

7.9



Insignal: Stegfunktion med höjden 80

$$\bar{T}(s) = \frac{80}{s}$$

$$\text{Utsignalens transform } Y = \bar{T} \cdot G = \frac{80}{s(1+Ts)}$$

$$\text{Motsvarande tidsfunktion (enligt tabell)} \quad y(t) = 80(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Enligt uppgiftstexten gäller att $y(20) = 65$, detta ger

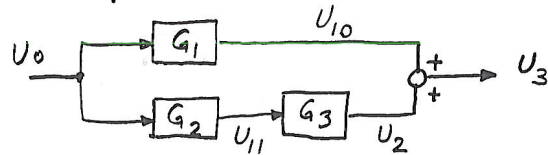
$$y(20) = 80(1 - e^{-\frac{20}{T}}) = 65$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{20}{T}} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow -\frac{20}{T} = \ln\left(\frac{3}{16}\right) \Rightarrow T = \frac{-20}{\ln\left(\frac{3}{16}\right)} = 11,95$$

7.12

Principiellt blockschema



För den undre tanken gäller:

$$\frac{dV_2}{dt} = U_{11} - U_2 \quad \text{där } V_2 = A_2 h_2 = A_2 R_2 U_2$$

$$\Rightarrow A_2 R_2 \frac{dU_2}{dt} = U_{11} - U_2 \Rightarrow A_2 R_2 \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_{11}$$

Laplace transformering $\Rightarrow A_2 R_2 U_2 s + U_2 = U_{11}$

$$U_2 (1 + A_2 R_2 s) = U_{11}$$

$$\Rightarrow G_3 = \frac{U_2}{U_{11}} = \frac{1}{1 + A_2 R_2 s}$$

För övre tanken fås:

$$\frac{dV_1}{dt} = U_0 - U_{10} - U_{11} \Rightarrow A_1 \frac{dh_1}{dt} = U_0 - \frac{h_1}{R_{10}} - \frac{h_1}{R_{11}}$$

$$A_1 h_1 s = U_0 - h_1 \left(\frac{R_{10} + R_{11}}{R_{10} R_{11}} \right)$$

mult.
med
 $R_{10} R_{11}$

$$\Rightarrow A_1 R_{10} R_{11} h_1 s + h_1 (R_{10} + R_{11}) = R_{10} R_{11} U_0$$

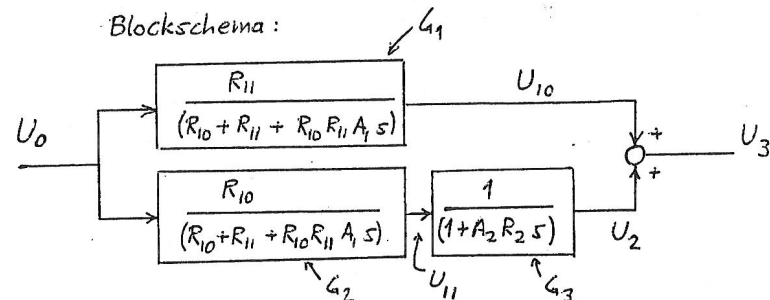
$$\Rightarrow \frac{H_1}{U_0} = \frac{R_{10} R_{11}}{A_1 R_{10} R_{11} s + (R_{10} + R_{11})}$$

Eftersom utflödena U_{11} och U_{10} är direkt proportionella mot nivån ($U_{11} = h_1/R_{11}$, $U_{10} = h_1/R_{10}$) fås

$$G_1 = \frac{U_{10}}{U_0} = \frac{R_{11}}{A_1 R_{10} R_{11} s + R_{10} + R_{11}} \quad \text{resp.}$$

$$G_2 = \frac{U_{11}}{U_0} = \frac{R_{10}}{A_1 R_{10} R_{11} s + R_{10} + R_{11}}$$

Blockschema:



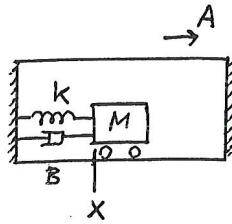
$$G_{TOT} = G_1 + G_2 \cdot G_3 = \frac{1}{(R_{10} + R_{11} + R_{10} R_{11} A_1 s)} \left[R_{11} + \frac{R_{10}}{(1 + A_2 R_2 s)} \right] =$$

$$= \frac{R_{11} (1 + A_2 R_2 s) + R_{10}}{(R_{10} + R_{11} + R_{10} R_{11} A_1 s) (1 + A_2 R_2 s)} =$$

$$= \frac{R_{10} + R_{11} + A_2 R_2 R_{11} s}{(R_{10} + R_{11}) + (A_2 R_2 R_{10} + A_2 R_2 R_{11} + A_1 R_{10} R_{11}) s + A_1 A_2 R_{10} R_{11} R_2 s^2}$$

OBS! Sammanslagningen av de tre blocken har gjorts med regler som studeras djupare i kapitel 8.

7.15 a



Newtons andra lag ger

$$\sum F = M (A + \ddot{x})$$

total acceleration (yttre + inre)

$$-kx - B\dot{x} = MA + M\ddot{x}$$

$$\Rightarrow M\ddot{x} + B\dot{x} + kx = -MA$$

Laplace-transformering ger:

$$X(Ms^2 + Bs + k) = -M\bar{A}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{X}{\bar{A}} = \frac{-M}{Ms^2 + Bs + k} = \frac{-1}{s^2 + \left(\frac{B}{M}\right)s + \left(\frac{k}{M}\right)}$$

b) Följande formler används:

• Max översväng $M_p = 100 \cdot \exp \frac{-5\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ (%)
• Tid vid max översväng $t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$

Vi önskar $M_p = 5\%$, det ger följande ekvation

$$\exp \frac{-5\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,05$$

$$\Rightarrow \frac{-5\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln 0,05 = -2,996$$

$$\Rightarrow -5\pi = -2,996 \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\Rightarrow \pi^2 \zeta^2 = 8,974 (1-\zeta^2)$$

$$\Rightarrow (\pi^2 + 8,974) \zeta^2 = 8,974$$

$$\Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{8,974}{\pi^2 + 8,974}} = 0,69$$

Om $\zeta = 0,69$
fås $M_p = 5\%$

Vi önskar vidare att $t_p = 1$, vilket ger

$$\frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{1-0,69^2}} = 4,34$$

dvs. om $\omega_0 = 4,34$
fås $t_p = 1$

Jämförelse med vår överföringsfunktion ger

$$\frac{B}{M} = 2\zeta\omega_0 \Rightarrow B = 2\zeta\omega_0 M = 2 \cdot 0,69 \cdot 4,34 \cdot 0,3 = 1,8$$

$$\frac{k}{M} = \omega_0^2 \Rightarrow k = M\omega_0^2 = 0,3 \cdot 4,34^2 = 5,65$$

Svar Välj $\begin{cases} B = 1,8 \\ k = 5,65 \end{cases}$

c) Processens statiska förstärkning är $G(0) = -\frac{M}{k} = 0,053$ Om $A = 1 \text{ m/s}^2$ fås därförmassans utslag (stationärt): $-0,053 \text{ m} = -5,3 \text{ cm}$

7.17 a) För en process med översväng använder vi metoden i kapitel 7.6 för bestämning av överföringsfunktionen

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mätningar med} \\ \text{linjal ger:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} b=7,5 \\ a=15 \end{array} \Rightarrow d = \frac{7,5}{15} = 0,5$$

Formler på sid 115 ger:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\ln 0,5}\right)^2 + 1}} = 0,11$$

T_0 uppmäts till 4,2 vilket ger

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{4,2 \sqrt{1-0,11^2}} = 1,51$$

Insättning i $G(s)$ ger

$$G(s) = \frac{50 \cdot 1,51^2}{s^2 + 2 \cdot 0,11 \cdot 1,51 s + 1,51^2} = \frac{114}{s^2 + 0,33 s + 2,28}$$

b) På samma sätt som ovan fås

$$\left. \begin{array}{l} d=0,33 \\ T_0=5 \\ K=20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \zeta=0,174 \\ \omega_0=1,28 \end{array} \right\} \Rightarrow G(s) = \frac{33}{s^2 + 0,45 s + 1,64}$$

c-d) Använd metoden som är beskriven på sid 112-114 i faktaboken.

$$\text{7.17 c} \quad \text{Mätning ger} \begin{cases} T_{1/3} = 2 \\ T_{2/3} = 3,6 \\ K = 3 \end{cases} \Rightarrow Q = \frac{3,6}{2} = 1,8$$

Eftersom $Q < 1,92$ krävs tre tidskonstanter

$$G = \frac{K}{(1+Ts)(1+aTs)(1+a^2Ts)}$$

Diagram 7.1 och 7.2 ger

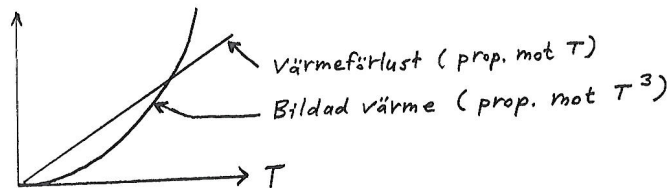
$$\begin{cases} \alpha = 0,48 \\ P = 1,12 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{36}{1,12(1 + 0,48 + 0,48^2)} = 1,88$$

Insättning ger

$$G = \frac{3}{(1+1,88s)(1+0,90s)(1+0,43s)}$$

7.19 a) $\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut}$ där $\begin{cases} P_{in} = P + 0,1 T^3 \\ P_{ut} = 5(T - T_0) = 5T \\ E = C \cdot T \end{cases}$

$\Rightarrow C \frac{dT}{dt} = P + 0,1 T^3 - 5T$ (gäller för $T > 0$)



b) Vid en stationär punkt gäller att $\frac{dT}{dt} = 0$
(temperaturen konstant)

$\Rightarrow 0,1 T^3 - 5T = 0$

$\Rightarrow T(0,1 T^2 - 5) = 0$

$0,1 T^2 - 5 = 0 \Rightarrow T^2 = 50$

$\Rightarrow T = (\pm) \sqrt{50} = 7,1$

Stationära punkter

$\begin{cases} T = 0 \\ T = 7,1 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases}$

Endast en av de stationära punkterna motsvarar en fortgående reaktion, nämligen den där $T = 7,1 \text{ } ^\circ\text{C}$

Linearisering ger

$f(t) = 0,1 T^3 - 5T \Rightarrow f'(t) = 0,3 T^2 - 5$

$f'(7,1) = 0,3 \cdot 7,1^2 - 5 = 10$

Vid arbetspunkten gäller alltså att

$\Delta f \approx 10 \cdot \Delta T$

Den lineariserade ekvationen (för små avvikelser från arbetspunkten $T = 7,1 \text{ } ^\circ\text{C}$) blir alltså:

$C \frac{d\Delta T}{dt} = 10 \cdot \Delta T + P$ där $C = 100$

c) Laplace-transformering ger

$100 \Delta \bar{T} s = 10 \Delta \bar{T} + \bar{P}$

$\Rightarrow (100s - 10) \Delta \bar{T} = \bar{P}$

$\Rightarrow G(s) = \frac{\Delta \bar{T}}{\bar{P}} = \frac{1}{100s - 10}$

Polbestämning $100s - 10 = 0$

$\Rightarrow s - 0,1 = 0 \Rightarrow s = 0,1$

Polen har positiv realdel vilket motsvarar en instabil process (enl avsnitt 6.4 och 10.1)

8.2 Transformera differentialekvationerna till överföringsfunktioner

Block 1: $Ys^2 + 2Ys + 3Y = 5Us + U$

$$\Rightarrow Y(s^2 + 2s + 3) = U(5s + 1)$$

$$\Rightarrow G_1 = \frac{Y}{U} = \frac{5s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

Block 2: $3Zs + 2Z = 6Y$

$$\Rightarrow Z(3s + 2) = 6Y$$

$$\Rightarrow G_2 = \frac{Z}{Y} = \frac{6}{3s + 2}$$

Eftersom blocken är seriekopplade fås:

$$\begin{aligned} G_{\text{TOT}} = \frac{Z}{U} &= G_1 \cdot G_2 = \frac{6(5s + 1)}{(s^2 + 2s + 3)(3s + 2)} = \\ &= \frac{30s + 6}{3s^3 + 8s^2 + 13s + 6} \end{aligned}$$

8.3 a) Lagen om återkoppling ger

$$\begin{aligned} G &= \frac{Y}{R} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{\frac{1}{1 + 10s}}{1 + \frac{1}{1 + 10s} \cdot \frac{1}{1 + s}} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{multiplicera med} \\ (1 + 10s)(1 + s) \text{ i} \\ \text{täljare \& nämnare} \end{array} \right\} = \frac{1 + s}{(1 + 10s)(1 + s) + 1} = \\ &= \frac{1 + s}{10s^2 + 11s + 2} \end{aligned}$$

b) I uppgift b har vi inget block i återkopplingen, vilket innebär att $G_2 = 1$ (enhetsåterkoppling).

Detta ger

$$\begin{aligned} G &= \frac{Y}{R} = \frac{\frac{1}{1 + 10s}}{1 + \frac{1}{1 + 10s} \cdot 1} = \frac{1}{(1 + 10s) + 1} = \\ &= \frac{1}{2 + 10s} \end{aligned}$$

c) I uppgift c har vi positiv återkoppling (två plusstecken i återföringen). Vi ska då ha minustecken i formeln för G_{TOT} .

$$\begin{aligned} G_{\text{TOT}} = \frac{Y}{R} &= \frac{\frac{1}{1 + 10s}}{1 - \frac{1}{1 + 10s} \cdot \frac{1}{1 + s}} = \frac{1 + s}{(1 + 10s)(1 + s) - 1} = \\ &= \frac{1 + s}{10s^2 + 11s} \end{aligned}$$

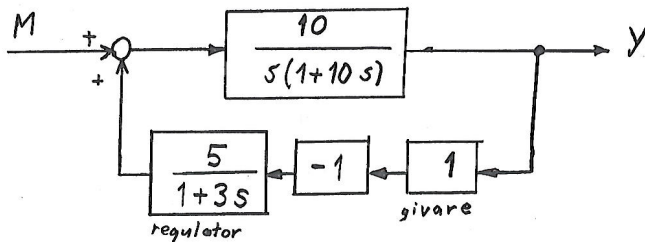
8.4 a) Vid bestämning av överföringsfunktionen från y_{ref} till y kan vi bortse från störningen M (den kan sättas lika med noll). Regulatorns och processens block blir då seriekopplade, vilket ger:

$$\frac{Y}{Y_{REF}} = \frac{\frac{5}{(1+3s)} \cdot \frac{10}{s(1+10s)}}{1 + \frac{5}{(1+3s)} \cdot \frac{10}{s(1+10s)} \cdot 1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Multiplitera med} \\ (1+3s)(1+10s) \cdot s \\ \text{i täljare och} \\ \text{nämnare} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{50}{(1+3s)s(1+10s) + 50} = \frac{50}{30s^3 + 13s^2 + s + 50}$$

b) Vid bestämning av överföringsfunktionen från M till y kan vi "nollställa" bärvärdet y_{ref} [Enligt superpositionsprincipen]

Blockskemat kan ^{då} ritas om enligt nedan:



OBSERVERA

- * Regulatorn hamnar nu i återkopplingen
- * Det blir positiv återkoppling
- * Minustecknet i jämföraren blir ett eget block (eller kan flyttas in i annat block)

Återkopplingslagen ger nu:

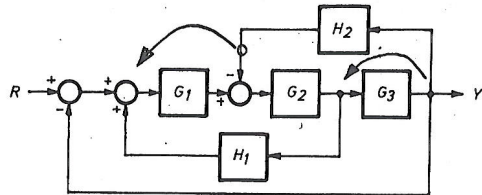
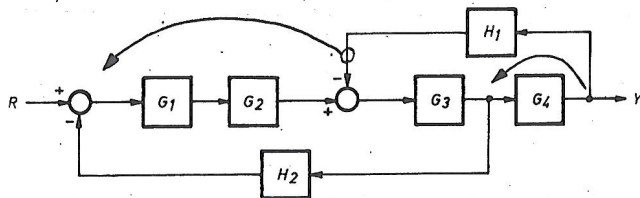
$$\frac{Y}{M} = \frac{\frac{10}{s(1+10s)}}{1 - \frac{10}{s(1+10s)} \cdot \frac{-5}{(1+3s)}} =$$

$$= \frac{10(1+3s)}{s(1+10s)(1+3s) + 50} = \frac{10+30s}{30s^3 + 13s^2 + s + 50}$$

Denna motsvarar de tre blocken i återkopplingen

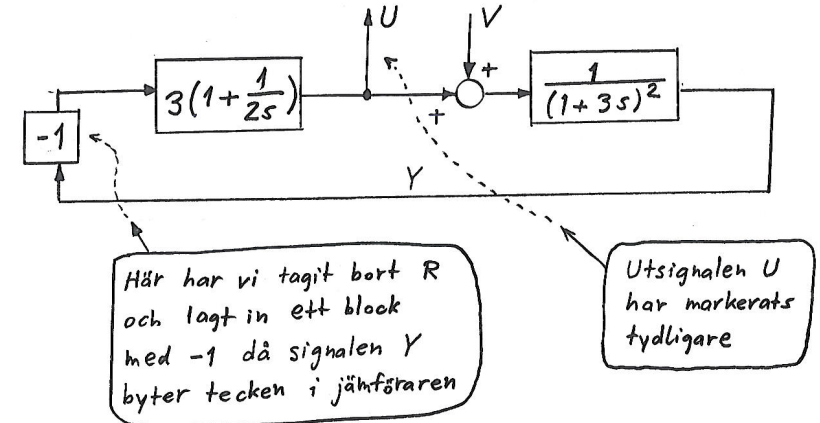
8.5 Ledtrådar för att komma igång

- Börja med den inre loopen (slå ihop G_1 , G_2 och G_3 till ett block). Fortsätt därefter med hela systemet.
- Flytta den mellersta förgreningspunkten efter blocket G_3 , se lagarna på sid 124. Använd därefter lagen om parallellkoppling och lagen om återkoppling.
- d) Flytta differenspunkten och förgreningspunkten före blocken (enligt figur). Därefter används lagen om parallellkoppling och återkoppling

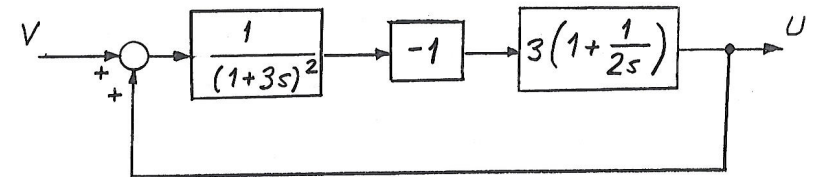


- Börja med den inre loopen (slå ihop G_1 och G_2 till ett block). Fortsätt därefter med den yttre loopen och multiplicera till sist med G_4 .

- ### 8.7
- Vid bestämning av överföringsfunktionen från V till U kan vi bortse från signalen R .
Blockschemat kan ritas om i 2 steg enligt nedan:



Nu kan vi rita om systemet (förvränga det) på följande sätt



Återkopplingslagen ger nu (positiv återkoppling):

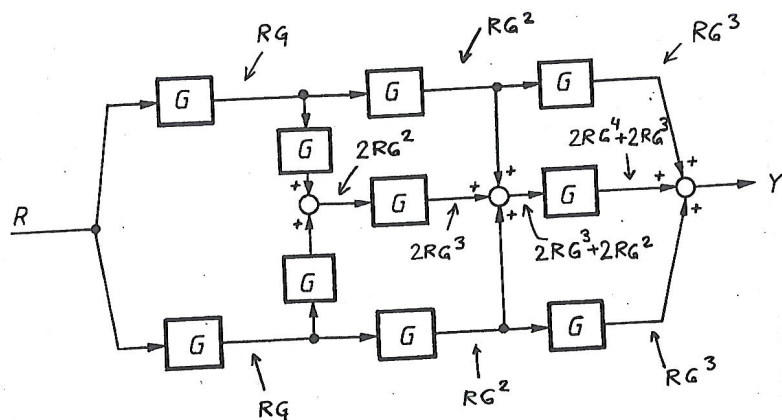
$$G_{VU} = \frac{U}{V} = \frac{\frac{-1}{(1+3s)^2} \cdot 3\left(1+\frac{1}{2s}\right)}{1 - \frac{-1}{(1+3s)^2} \cdot 3\left(1+\frac{1}{2s}\right)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{mult med} \\ 2s(1+3s)^2 \\ \text{"uppe och nere"} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{-3(2s+1)}{2s(1+3s)^2 + 3(2s+1)} = \frac{-(6s+3)}{18s^3 + 12s^2 + 8s + 3}$$

8.10 För varje linjärt block gäller att utsignalens transform är lika med insignalens transform multiplicerat med överföringsfunktionen

$$R \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow R \cdot G$$

För det aktuella systemet får vi:



Vi ser att $Y = 2RG^4 + 2RG^3 + 2RG^3 = 2R(G^4 + 2G^3)$

dvs $G_{Tot} = \frac{Y}{R} = 2G^4 + 4G^3$

Insättning av $G = \frac{1}{1+s}$ ger:

$$G_{Tot} = \frac{2}{(1+s)^4} + \frac{4}{(1+s)^3} = \frac{2 + 4(1+s)}{(1+s)^4} = \frac{6+4s}{(1+s)^4}$$

9.1 Alla uppgifter här bygger på att man behärskar de grundläggande lagarna för komplexa tal. De viktigaste lagarna finns i appendix i faktaboken.

a) $G(j\omega) = \frac{5}{1+2j\omega}$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|5|}{|1+2j\omega|} = \frac{5}{\sqrt{1+4\omega^2}}$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \angle G(j\omega) = \angle 5 - \angle 1+2j\omega = 0 - \arctan\left(\frac{2\omega}{1}\right) = \\ &= -\arctan(2\omega) \end{aligned}$$

b) $G(j\omega) = \frac{4}{j\omega}$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|4|}{|j\omega|} = \frac{4}{\omega}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle 4 - \angle j\omega = 0 - 90^\circ = -90^\circ$$

c) $G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+3j\omega)}$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|10|}{|j\omega(1+3j\omega)|} = \frac{10}{\omega \cdot \sqrt{1+9\omega^2}}$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \angle G(j\omega) = \angle 10 - \angle j\omega - \angle 1+3j\omega = \\ &= 0 - 90^\circ - \arctan(3\omega) \end{aligned}$$

$$d) \quad G(j\omega) = \frac{e^{-3j\omega}}{1+2j\omega}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|e^{-3j\omega}|}{|1+2j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}}^*$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle e^{-3j\omega} - \angle 1+2j\omega =$$

$$= -3\omega \left(\frac{180}{\pi} \right)^* - \arctan(2\omega)$$

$$e) \quad G(j\omega) = \frac{6+j\omega}{(4+2j\omega)(3+7j\omega)}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{36+\omega^2}}{\sqrt{16+4\omega^2} \cdot \sqrt{9+49\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle 6+j\omega - \angle 4+2j\omega - \angle 3+7j\omega =$$

$$= \arctan\left(\frac{\omega}{6}\right) - \arctan\left(\frac{2\omega}{4}\right) - \arctan\left(\frac{7\omega}{3}\right)$$

* Eftersom $e^{-Lj\omega} = \cos(-L\omega) + j \cdot \sin(-L\omega)$
 fås $|e^{-Lj\omega}| = \sqrt{\cos^2(-L\omega) + \sin^2(-L\omega)} = \sqrt{1} = 1$
 och $\angle e^{-Lj\omega} = \arctan\left(\frac{\sin(-L\omega)}{\cos(-L\omega)}\right) = \arctan(\tan(-L\omega)) =$
 $= -(L\omega) \text{ rad} = -L\omega \left(\frac{180}{\pi} \right) \text{ grader}$

$$g) \quad G(j\omega) = \frac{2}{1+0,4j\omega+2(j\omega)^2} =$$

$$= \frac{2}{\underbrace{1-2\omega^2}_{\text{RE}} + \underbrace{0,4j\omega}_{\text{IM}}}$$

Obs!
 $(j\omega)^2 = j^2 \omega^2 = -\omega^2$

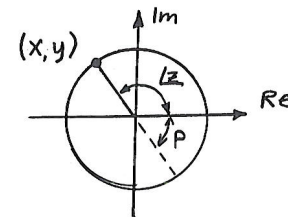
$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2 + 0,16 \cdot \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle 2 - \angle (1-2\omega^2) + 0,4j\omega =$$

$$\begin{cases} = 0 - \arctan\left(\frac{0,4\omega}{1-2\omega^2}\right) & \text{om } (1-2\omega^2) > 0 \\ = 0 - \arctan\left(\frac{0,4\omega}{1-2\omega^2}\right) - 180^* & \text{om } (1-2\omega^2) < 0 \end{cases}$$

* Om det komplexa talet $z = x + jy$ har negativ realdel (dvs $x < 0$) gäller för dess fasvinkel (argument):

$$\angle z = \arctan \frac{y}{x} \pm 180^\circ$$



Om man inte lägger till/drar ifrån 180° fås felaktigt vinkeln p, då uttrycket evalueras med en räknedosa

9.4 Utan regulator

$$G_{VR} = \frac{Y}{V} = \frac{1}{(1+s)^2} \quad G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2} \cdot \sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\omega = 0,2 \text{ ger } A(0,2) = \frac{1}{1+0,2^2} = 0,962$$

$$\Rightarrow A_y = 0,962$$

Med regulator

$$G_{VR} = \frac{\frac{1}{(1+s)^2}}{1 + \frac{1}{s(1+s)^2}} = \frac{s}{s(1+s)^2 + 1} = \frac{s}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Frekv.
funktion

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + j\omega + 1} = \frac{j\omega}{(1-2\omega^2) + j(\omega-\omega^3)}$$

Amplitud
fktn.

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2 + (\omega-\omega^3)^2}}$$

$$\omega = 0,2 \text{ ger } A(0,2) = \dots = 0,213 \Rightarrow A_y = 0,213$$

Slutsats Störningen har mindre inverkan på utsignalen hos det återkopplade reglersystemet jämfört med fallet utan reglering.

9.5

$$G(j\omega) = \frac{K e^{-Lj\omega}}{1 + Tj\omega} \Rightarrow \varphi(\omega) = -L\omega \left(\frac{180}{\pi} \right) - \arctan(T\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

Vi vet att $A(1) = 5$ och $A(2) = 3,6$.

Det ger:

$$\begin{cases} \frac{K}{\sqrt{1+T^2}} = 5 & \Rightarrow K = 5\sqrt{1+T^2} & (1) \\ \frac{K}{\sqrt{1+4T^2}} = 3,6 & \Rightarrow K = 3,6\sqrt{1+4T^2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \text{ ger att } 5\sqrt{1+T^2} = 3,6\sqrt{1+4T^2}$$

$$\Rightarrow 25(1+T^2) = 12,96(1+4T^2)$$

$$\Rightarrow 26,84T^2 = 12,04$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{12,04}{26,84}} = 0,67$$

$$K = 5\sqrt{1+0,67^2} = 6,02$$

Vi vet också att $\varphi(1) = -100^\circ$

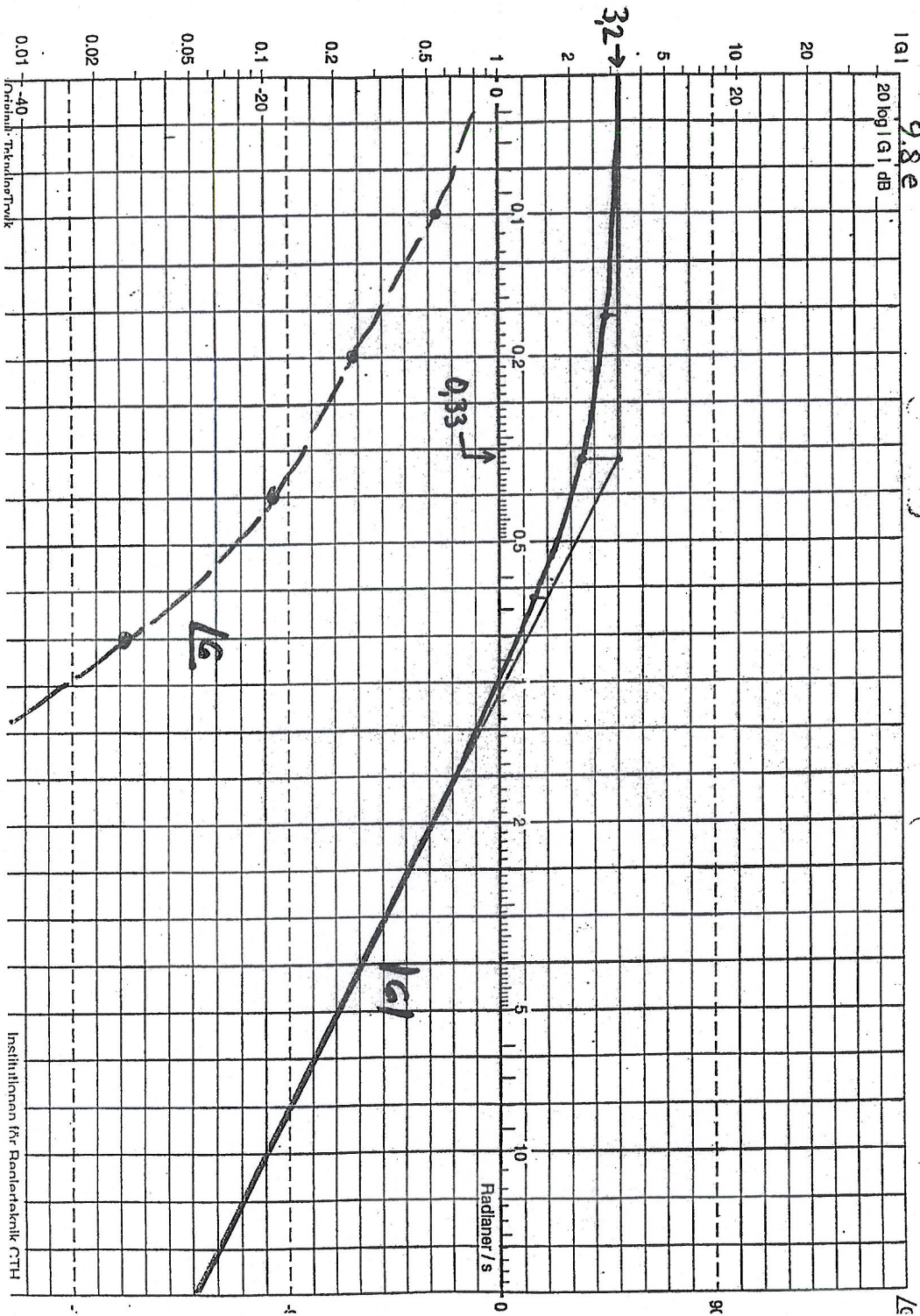
Det ger

$$\varphi(1) = -L \left(\frac{180}{\pi} \right) - \arctan(0,67) = -100$$

$$\Rightarrow -L \cdot 57,3 - 33,8 = -100$$

$$\Rightarrow L = \frac{66,2}{57,3} = 1,16$$

$$\text{dvs } \begin{cases} T = 0,67 \\ K = 6,02 \\ L = 1,16 \end{cases}$$



9.8 e) $G(s) = \frac{3.2 e^{-2s}}{(1+3s)}$ $G(j\omega) = \frac{3.2 e^{-2j\omega}}{(1+3j\omega)}$

$$A(\omega) = \frac{3.2}{\sqrt{1+9\omega^2}}$$

Amplitudkurvan

Gödtiden påverkar ej amplitudkurvan

$G(s) \Rightarrow$ Statisk förstärkning $= A(0) = 3.2$
 Tidskonstant $T = 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Brytfrekvens $\omega_b = \frac{1}{3}$ rad/s
 Amplitudkurvan bryter nedåt
 vid ω_b

Faskurvan

$$\varphi(\omega) = -2\omega\left(\frac{180}{\pi}\right) - \arctan(3\omega)$$

ω		$\varphi(\omega)$
0,1	-11,5 - 16,7	-28
0,2	-23 - 31	-62
0,4	-46 - 50	-96
0,8	-92 - 67	-159
1,6	-183 - 78	-261

Beräknad
med
räknedosa

9.10 Vi antar att systemet ^{endast} har reella poler.

LF-asymptoten har lutningen noll $\Rightarrow$ Ingen integration

$$K_{LF} = 5 \quad (\text{statisk förstärkning})$$

Brytfrekvenserna ger

$$\begin{cases} \omega = 0,2 \Rightarrow \text{Faktor } (1+5s) \text{ i nämnaren} \\ \omega = 0,5 \Rightarrow \text{--} (1+2s) \text{ i täljaren} \\ \omega = 2 \Rightarrow \text{--} (1+0,5s)^2 \text{ i nämnaren} \\ \text{(dubbel)} \end{cases}$$

$$\text{Sammantaget fås } G(s) = \frac{5(1+2s)}{(1+5s)(1+0,5s)^2}$$

9.11 Ur bodediagrammet kan vi konstatera:

- LF-asymptoten har lutningen noll, dvs vi har ingen integration i processen (inget ensamt s i nämnaren)
- Den statiska förstärkningen $K_{LF} = 5$
- Vi har en dubbel brytpunkt vid $\omega = 0,8 \text{ rad/s}$ motsvarande tidskonstanten $T = \frac{1}{0,8} = 1,25$
- Fäsvridningen ökar obegränsat då $\omega \rightarrow \infty$ vilket ger att processen måste ha död tid e^{-Ls}

VI FÅR
ALLTSA

$$G = \frac{5 \cdot e^{-Ls}}{(1+1,25s)^2}$$

För att bestämma död tiden L får vi titta på fäsvridningen vid någon viss frekvens (t.ex $\omega = 1 \text{ rad/s}$)

$$G(j\omega) = \frac{5 \cdot e^{-Lj\omega}}{(1+1,25j\omega)^2} \Rightarrow \varphi(\omega) = -L\omega \frac{180}{\pi} - 2 \cdot \arctan(1,25\omega)$$

Vi vet att $\varphi(1) = -128^\circ$ (enl Bodediagrammet)

$$\text{dvs. } -L \cdot \frac{180}{\pi} - 2 \cdot \arctan(1,25) = -128^\circ$$

$$\Rightarrow L = \frac{128 - 2 \cdot \arctan(1,25)}{\frac{180}{\pi}} = \pi \cdot \frac{25,32}{180} = 0,44$$

$$\text{dvs } G = \frac{5 \cdot e^{-0,44s}}{(1+1,25s)^2}$$