

10.1

a) $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = \dot{x} + x$

$\Rightarrow Ys^2 + Ys - 6Y = Xs + X$

$\Rightarrow Y(s^2 + s - 6) = X(s + 1)$

$\Rightarrow G(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}$

Kar. ekv $s^2 + s - 6 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\begin{cases} s_1 = 2 \\ s_2 = -3 \end{cases}$

En pol i högra halvplanet
 $\Rightarrow$ Systemet instabilt

d) $y''' + 3y'' - 2y' + y = u' + 5u$

$Ys^3 + 3Ys^2 - 2Ys + Y = Us + 5U$

$Y(s^3 + 3s^2 - 2s + 1) = U(s + 5)$

$G(s) = \frac{s+5}{s^3 + 3s^2 - 2s + 1}$

Kar. ekv $s^3 + 3s^2 - 2s + 1 = 0$

Routh's metod ger

s^3	1	-2	0
s^2	3	1	0
s^1	$-\frac{7}{3}$	0	
s^0	1		

$\Rightarrow$ Olika tecken i första kolumnen

$\Rightarrow$ Systemet instabilt

$\frac{3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1}{3}$

10.3

$G_{TOT} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{3K}{s(1+2s)^2}}{1 + \frac{3K}{s(1+2s)^2}} = \frac{3K}{s(1+2s)^2 + 3K} =$

$= \frac{3K}{4s^3 + 4s^2 + s + 3K}$

Karakteristisk ekvation $4s^3 + 4s^2 + s + 3K = 0$

Routh's metod ger

s^3	4	1	0
s^2	4	$3K$	0
s^1	$\frac{4-12K}{4}$	0	
s^0	$3K$		

Stabilitetsvillkor

$4 - 12K > 0$

$\Rightarrow K < 1/3$

$3K > 0 \Rightarrow K > 0$

Systemet stabilt om $0 < K < 1/3$

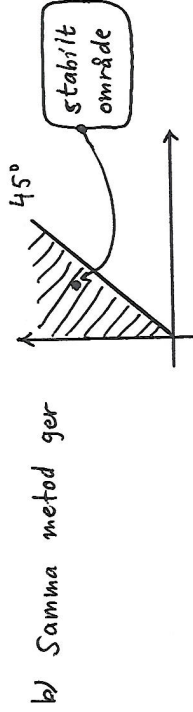
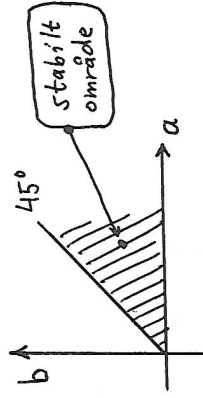
10.4 a) $s^3 + as^2 + s + b = 0$

Routh's method ger

1	1
a	b
$\frac{a-b}{a}$	0
b	

$\Rightarrow$ Villkor för stabilitet

$$\begin{cases} a > 0 \\ a-b > 0 \Rightarrow b < a \\ b > 0 \end{cases}$$



10.8 Vi ritat Bodediagram för $G = \frac{4}{(1+s)^3}$

$K_{LF} = 4$

$\omega_{bryt} = 1 \text{ rad/s}$ (3-dubbel brytfrekvens)

$G(j\omega) = \frac{4}{(1+j\omega)^3} \Rightarrow \angle G(j\omega) = -3 \cdot \arctan \omega$

ω	$\angle G(j\omega)$
0,2	-34
0,5	-80
1	-135
2	-190
0,1	-17

Bodediagrammet (nästa sida) ger:

* Om $K=1$ fås $\begin{cases} \phi_m = 23^\circ \\ A_m = 6 \text{ dB} = 2 \text{ ggr} \end{cases}$ (stabil)

* Vid frekvensen 1 rad/s har vi fasvridningen -135° ,
dvs avståndet 45° till -180° -graderslinjen

Vi ser $|G(1)| = 3 \text{ dB} = 1,41 \text{ ggr}$

Välj därför $K = \frac{1}{1,41} = 0,71$ för att få $\phi_m = 45^\circ$

* $K_{\max} = 2$ (ty $A_m = 2 \text{ ggr}$)

10.9

$$G_{RY} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{K}{s(1+Ts)^2}}{1 + \frac{K}{s(1+Ts)^2}} = \frac{K}{s^3 + 2Ts^2 + s + K}$$

Routh's method ger

T^2	1		
$2T$		K	
$\frac{2T-T^2K}{2T}$			0
K			

$\Rightarrow$ Villkor för stabilitet

$$2 - TK > 0$$

$$\Rightarrow K < \frac{2}{T}$$

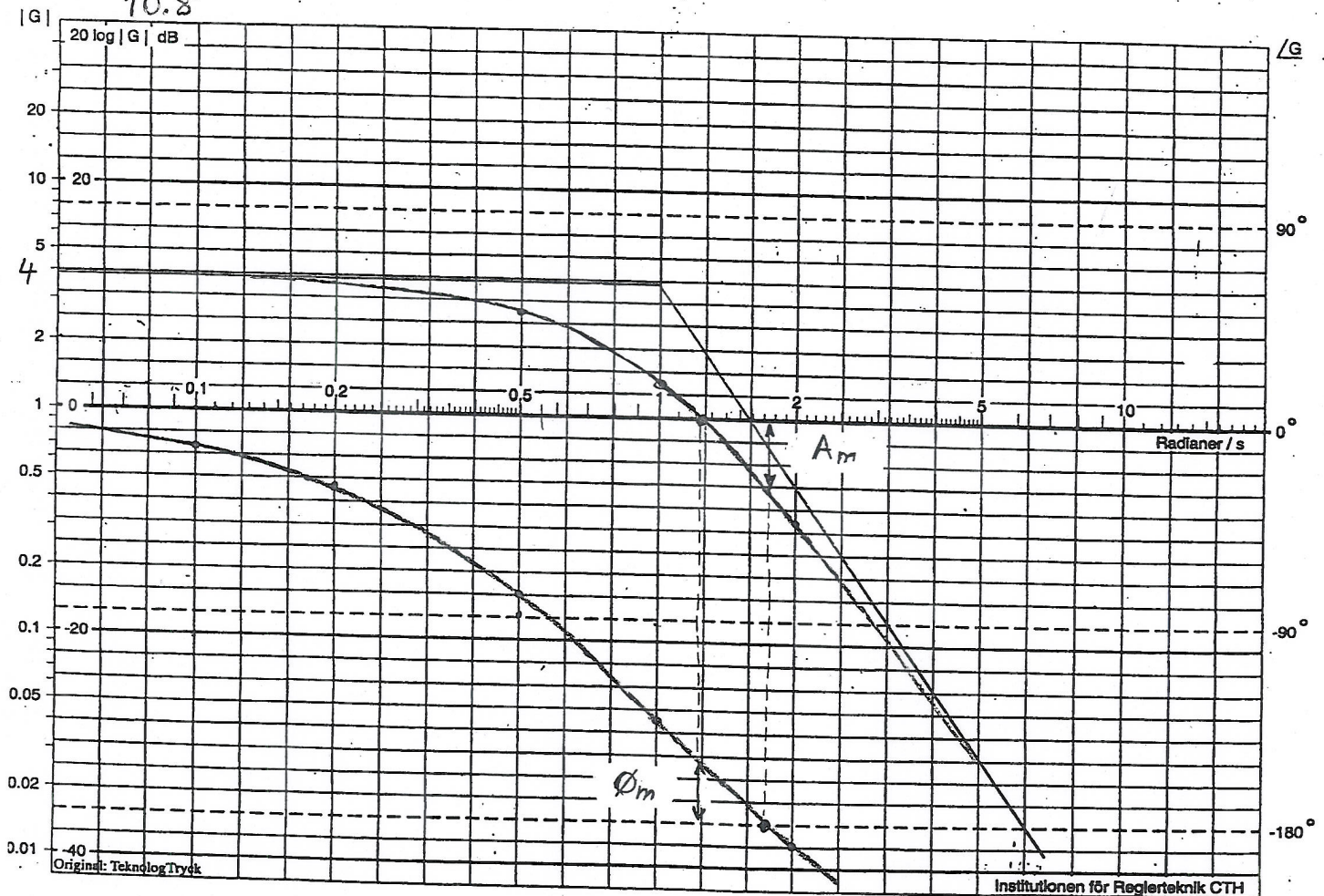
Gräns för instabilitet

$$K_{max} = \frac{2}{T}$$

Välj därför $K = \frac{1}{T}$

OBS! Amplitudmarginalen $A_m = 2$ innebär att förstärkningen kan ökas en faktor 2 innan systemet blir instabilt.

10.8



$$10.10 \quad G_{RY} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{K}{S(1+S)}}{1 + \frac{K}{S(1+S)(1+Ts)}} = \frac{K(1+Ts)}{S(1+S)(1+Ts) + K} =$$

$$= \frac{K + KTs}{Ts^3 + (1+T)S^2 + S + K}$$

Routh's method

S^3	T	1	0
S^2	$1+T$	K	0
S^1	$\frac{(1+T)-TK}{1+T}$	0	
S^0	K		

Villkor för stabilitet $1+T-TK > 0 \Rightarrow TK < 1+T$
 $\Rightarrow K < \frac{1+T}{T}$

$\Rightarrow$ Kritisk förstärkning $K = \frac{1+T}{T}$

Förstärkning som ger amplitudmarginalen 2

$$K = \frac{1+T}{2T}$$

(Förstärkningen som ger $A_m=2$ är en funktion av T)

$$K = \frac{1+T}{2T} \Rightarrow 1+T = 2KT \Rightarrow T(2K-1) = 1$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2K-1} \quad T_{\max} = \frac{1}{2K-1}$$

b) Om $K=3$ fås $T = \frac{1}{6-1} = \frac{1}{5} = 0.2$

10.11 a)

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a}{1+G_R G_P} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{(2s+3)}{(s+2)} \cdot \frac{2}{s(5s+1)}} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+2) \cdot s \cdot (5s+1)}{(s+2) \cdot s \cdot (5s+1) + (2s+3) \cdot 2} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s^3 + 11s^2 + 2s}{5s^3 + 11s^2 + 5s + 6} = \frac{0}{6} = 0$$

$$e_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1+G_R G_P)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \left(1 + \frac{(2s+3)}{(s+2)} \cdot \frac{2}{s(5s+1)} \right)} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+2)(5s+1)}{s(s+2)(5s+1) + 2(2s+3)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s^2 + 11s + 2}{5s^3 + 11s^2 + 5s + 6} =$$

$$= \frac{2}{6} = 0.33$$

OBS! Eftersom processen har integration (ett s kan brytas ut ur nämnaren) kan man direkt sluta sig till att $e_0 = 0$ utan några beräkningar. Se slutsatserna i kapitel 10.2

Sätt $a=1$

$$10.15 \quad e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a}{1 + G_R G_P} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{5K}{(1+s)^3}} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1+s)^3}{(1+s)^3 + 5K} = \frac{1}{1+5K}$$

$$\text{Krav} \quad \frac{1}{1+5K} < 0,1 \Rightarrow 1+5K > 10 \Rightarrow 5K > 9$$

$$\Rightarrow K > \frac{9}{5} = 1,8$$

Obs! Vi måste också kontrollera stabiliteten

$$G_{RY} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{5K}{(1+s)^3}}{1 + \frac{5K}{(1+s)^3}} = \frac{5K}{(1+s)^3 + 5K} = \frac{5K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 5K}$$

Routh's metod ger

1	3		
3	1+5K		
9-(1+5K)	0		
3			
1+5K			

$\Rightarrow$ Villkor för stabilitet
 ① $9-(1+5K) > 0 \Rightarrow 5K < 8 \Rightarrow K < 1,6$
 ② $1+5K > 0 \Rightarrow K > -0,2$

$\xrightarrow{-0,2} \xrightarrow{1,6} K$
 Stabilitetsområde

Svar Det finns inget stabilt system som uppfyller kravet $e_0 < 0,1$ kraven är oförenliga.

10.16 a) Robotarmen (Motor + Robot) har överföringsfunktionen

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{0,02}{s(1+s)}$$



Hastigheten v är derivatan av positionen $v = \dot{y}$ (motsvarande Ys)

Enligt slutvärdesatsen fås sluthastigheten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s V(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y \cdot s =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot U \cdot G = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{24}{s} \cdot \frac{0,02}{s(1+s)} = 0,48 \text{ m/s}$$

b) Beräkna först vilket K som ger amplitudmarginalen $A_n = 1,8$

$$G_{RY} = \frac{0,02 \cdot K}{(1+0,5s)s(1+s)} = \frac{0,02K}{1 + \frac{0,02K}{(1+0,5s)s(1+s)}} = \frac{0,02K}{0,5s^3 + 1,5s^2 + s + 0,02K}$$

Rouths metod ger

s^3	0,5	1	
s^2	1,5	0,02K	
s^1	$\frac{1,5-0,01K}{1,5}$	0	
s^0	0,02K		

$\Rightarrow$ Stabilitetsvillkor

$$1,5 - 0,01K > 0 \Rightarrow K < 150$$

$$0,02K > 0 \Rightarrow K > 0$$

Kritisk förstärkning:

$$K = 150$$

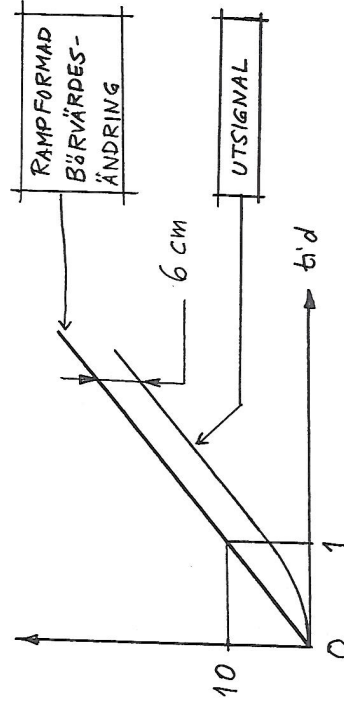
10.16 forts

Amplitudmarginalen 1,8 fas om

$$K = \frac{150}{1,8} = 83,3$$

Nu kan vi beräkna det kvarstående felet

$$\begin{aligned} e_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h}{s(1+G_R G_P)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0,1}{s \left(1 + \frac{0,02 \cdot 83,3}{(1+0,5s)s(1+s)} \right)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0,1(1+0,5s)s(1+s)}{s[(1+0,5s)s(1+s) + 0,02 \cdot 83,3]} = \\ &= \frac{0,1}{0,02 \cdot 83,3} = 0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$



10.21

Ledtrådar:

- ① Bestäm överföringsfunktionen G_{WR} från W till Y . (Formler i kapitel 8)
- ② Bestäm motsvarande amplitudfunktion $A(\omega)$ genom att först bestämma frekvensfunktionen $G_{WR}(j\omega)$ och sedan $A(\omega) = |G_{WR}(j\omega)|$
- ③ Bestäm utsignalens amplitud A_y enligt

$$A_y = A_w \cdot |G_{WR}(2)| = 3,2 \cdot A(2)$$

10.22 a) $G_{TOT} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{K}{(1+s)^2}}{1 + \frac{K}{(1+s)^2}} = \frac{K}{s^2 + 2s + (1+K)}$

$$G_{TOT}(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2 + 2j\omega + (1+K)} = \{K=16\} = \frac{16}{(17-\omega^2) + 2j\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{16}{\sqrt{(17-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sätt} \\ a=\omega^2 \end{array} \right\} = \frac{16}{\sqrt{(17-a)^2 + 4a}}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{289 - 30a + a^2}}$$

{Maxvärdet för $A(\omega)$ inträffar där polynomet $P(a) = a^2 - 30a + 289$ har sitt minima. Derivering ger:

$$\frac{dP}{da} = 2a - 30 = 0 \Rightarrow a = 15 \Rightarrow \omega^2 = 15$$

$$\text{Resonansfrekv.} \Rightarrow \omega_p = \sqrt{15} \text{ rad/s}$$

Resonansstoppen blir

$$M_p = A(\sqrt{15}) = \frac{16}{\sqrt{2^2 + 4 \cdot 15}} = \frac{16}{\sqrt{64}} = 2$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} \omega_p = \sqrt{15} \\ M_p = 2 \end{cases}$$

b) Känslighetsfunktionen

$$S = \frac{1}{1 + G_R G_P} = \frac{1}{1 + \frac{16}{(1+s)^2}} = \frac{(1+s)^2}{(1+s)^2 + 16}$$

$$= \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 17}$$

$$S(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 + 2j\omega}{17 - \omega^2 + 2j\omega}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}{\sqrt{(17-\omega^2)^2 + 4\omega^2}} = 1$$

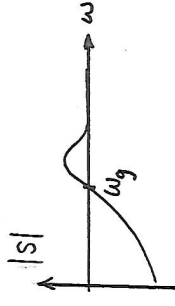
Ekv. $(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2 = (17-\omega^2)^2 + 4\omega^2$ Sätt $\omega^2 = p$

$$\Rightarrow (1-p)^2 = (17-p)^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2p + p^2 = 289 - 34p + p^2$$

$$\Rightarrow 32p = 288 \Rightarrow p = \frac{288}{32} = 9$$

$$\Rightarrow \omega_g = 3$$



Principiellt utseende på amplitudkurvan för S

Vi ska bestämma den frekvens ω_g där $|S|=1$

Svar Regulatorn dämpar

störningarna upp till frekvensen

$\omega = 3$ rad/s. Därefter hänger

den inte med längre.

10.24

Beräkning av K så att $\phi_m = 45^\circ$

$$G_p(s) = \frac{0,5}{(1+s)(1+10s)} \Rightarrow G_p(j\omega) = \frac{0,5}{(1+j\omega)(1+10j\omega)}$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = -\arctan(\omega) - \arctan(10\omega)$$

Vi provar oss fram till vilken frekvens som ger $\varphi(\omega) = -135^\circ$ (där avståndet är 45° till -180°)

Med räknedosa fås $\omega_{135} = 1,19 \text{ rad/s}$

$$A(\omega) = \frac{0,5}{\sqrt{1+\omega^2} \sqrt{1+100\omega^2}}$$

$$A(1,19) = \frac{0,5}{\sqrt{1+1,19^2} \sqrt{1+100 \cdot 1,19^2}} = \frac{0,5}{1,5544 \cdot 11,942} =$$

$$= 0,0269 \Rightarrow \text{Välj } K = \frac{1}{0,0269} = 37,2$$

Bestämning av känslighetsfunktionen

$$S = \frac{1}{1+G_R G_P} = \frac{1}{1 + \frac{0,5 \cdot 37,2}{(1+s)(1+10s)}} = \frac{(1+s)(1+10s)}{10s^2 + 11s + 19,6}$$

Vi söker den frekvens ω_0 där $|S|=1$

(Detta är den högsta frekvensen där regulatorn kan dämpa processstörningar)

$$S(j\omega) = \frac{10(j\omega)^2 + 11j\omega + 1}{10(j\omega)^2 + 11j\omega + 19,2} = \frac{1-10\omega^2 + 11j\omega}{19,2-10\omega^2 + 11j\omega}$$

$$|S(\omega)| = \frac{\sqrt{(1-10\omega^2)^2 + 121\omega^2}}{\sqrt{(19,2-10\omega^2)^2 + 121\omega^2}} = 1$$

$$\Rightarrow (1-10\omega^2)^2 + 121\omega^2 = (19,2-10\omega^2)^2 + 121\omega^2$$

$$\Rightarrow \text{Sätt } \omega^2 = p$$

$$\Rightarrow (1-10p)^2 = (19,2-10p)^2$$

$$\Rightarrow 1-20p + 100p^2 = 368,64 - 384p + 100p^2$$

$$\Rightarrow 364p = 367,64$$

$$\Rightarrow p = 1,01 \Rightarrow \omega = 1,005 \text{ rad/min}$$

$$\Rightarrow T_{sv} = \frac{2\pi}{1,005} = 6,25 \text{ min}$$

Vi ser att regulatorn dämpar störningar med periodtider längre än 6,25 min (motvarande $\omega = 1,005 \text{ rad/min}$)

Regulatorn kan alltså inte dämpa de sinusformade störningarna.

En bättre lösning är att använda framkoppling (kapitel 12)

10.25 a) Störningsdämpningen vid låga frekvenser bestäms av regulatorns förstärkning vid låga frekvenser då $\omega \rightarrow 0$ (se kap 10.4).

I vårt fall gäller

$$G_P = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{K(1+T_I s)}{T_I s}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_{PI} = \frac{K}{T_I s} \quad \text{eller} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_{PI}(j\omega)| = \frac{K}{T_I \omega}$$

Vi får alltså

$$J_V = \frac{1}{K_i} = \frac{T_I}{K}$$

För de tre regulatorerna får vi:

FALL NR	1	2	3
J_V	2,27	1,55	2,08

Regulator 2 är bäst

b) Styrsignalaktiviteten bestäms av regulatorns högfrekvensförstärkning

$$J_U = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_{PI}(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K \sqrt{1+T_I^2 \omega^2}}{T_I \omega} = K$$

För de tre regulatorerna fås:

FALL NR	1	2	3
J_U	2,2	1,35	0,48

Regulator 3 är bäst!

11.2

Vi löser uppgiften genom att bestämma K_0 och T_0 ur Bodediagrammet för G .

$$G(s) = \frac{5e^{-10s}}{1+20s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{5 \cdot e^{-10j\omega}}{1+20j\omega}$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = -10\omega \left(\frac{180}{\pi} \right) - \arctan 20\omega \quad \left| A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{1+400\omega^2}} \right|$$

Faskurvan ritas med beräkningar punkt för punkt medan amplitudkurvan kan ritas mha asymptoter.

ω	$\varphi(\omega)$
0,02	-33°
0,05	-74°
0,1	-121°
0,16	-164°
0,2	-191°
0,4	-312°

Räknedosa ger:

Bodediagrammet ger:

$$\omega_n = 0,18 \text{ rad/s} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{0,18} = 34,9$$

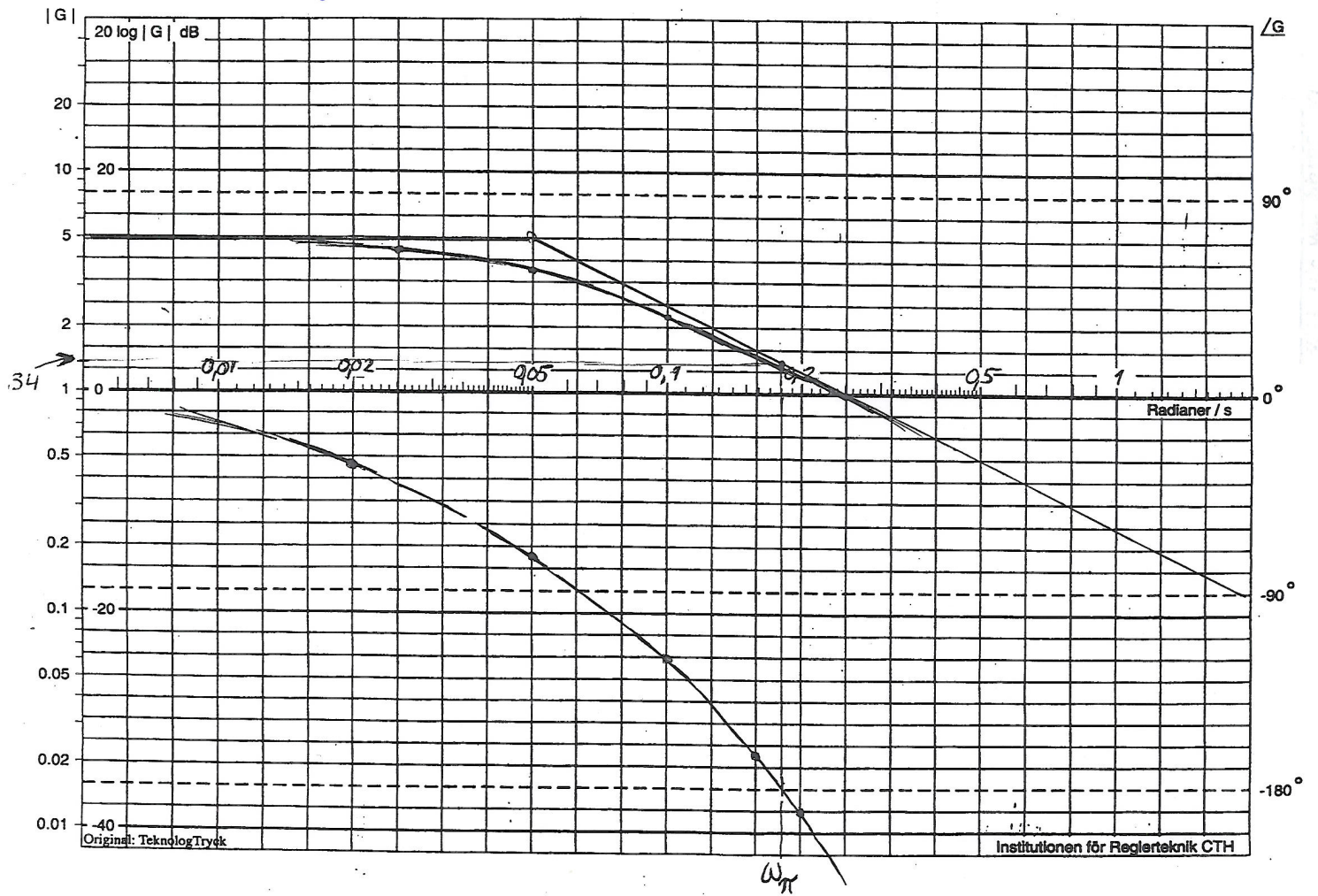
$$K_0 = \frac{1}{|G(j\omega_n)|} = \frac{1}{1,34} = 0,75$$

Ziegler-Nichols metod ger (för PI)

$$\begin{cases} K = 0,45 \cdot 0,75 = 0,338 \\ T_I = 0,85 \cdot 34,9 = 29,7 \end{cases}$$

c) Regulator 1 är sämst i båda avseenden

11.2 Bodediagram



11.3

Bodediagrammet ger

$$\begin{cases} \omega_H = 2 \text{ rad/s} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_H} = 3,14 \\ K_0 = \frac{1}{|G(\omega_H)|} = \frac{1}{0,22} \approx 4,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K = 0,6 \cdot 4,5 = 2,7 \\ T_1 = 0,5 \cdot 3,14 = 1,57 \\ T_D = 0,125 \cdot 3,14 = 0,39 \end{cases}$$

11.6 a) Vi vill ha $\phi_m = 45^\circ$
 $\Rightarrow$ Sök den frekvens där $\phi(\omega) = -135^\circ$

Bodediagrammet ger $\omega_{-135} = 2,1 \text{ rad/s}$

Vi ser att $|G(2,1)| = 0,4$

$$\Rightarrow \text{Välj } K = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ ggr (8 dB)}$$

$$b) e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_R G_P} = \frac{1}{1 + K_{LF}} = \frac{1}{1 + 2,5 \cdot 2,5} = 0,138$$

$$e_1 = \infty$$

Processens
lågfrekvens-
förstärkning

Regulatorns
förstärkning

Uppgiften
löses med
Bodediagram

11.9 a) $G_P(s) = \frac{2}{(1+s)^2} \Rightarrow G_P(j\omega) = \frac{2}{(1+j\omega)^2}$

$\Rightarrow A(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \quad \varphi(\omega) = -2 \arctan \omega$

Bodediagram för G_P ger (se nästa sida)

- För att få $\varphi_m = 45^\circ$ måste vi ha $\omega_c = 2,4 \text{ rad/s}$

$A(2,4) = \frac{2}{1+2,4^2} = 0,296 \Rightarrow K = \frac{1}{0,296} = 3,38 \approx 3,4$

Välj $K = 3,4$

b) I uppgift b får vi kretsöverföringen

$G_K(s) = \frac{1}{T_I s} \cdot \frac{2}{(1+s)^2} = K_I \cdot \frac{2}{s(1+s)^2}$ där $K_I = \frac{1}{T_I}$

Vi ritar Bodediagram för $\frac{2}{s(1+s)^2}$ och

Löser uppgiften på samma sätt som i uppgift a

Byt s mot $j\omega \Rightarrow \frac{2}{j\omega(1+j\omega)^2} \left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = \frac{2}{\omega(1+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = -90^\circ - 2 \arctan \omega \end{array} \right.$

Bodediagrammet (två sidor framåt) ger:

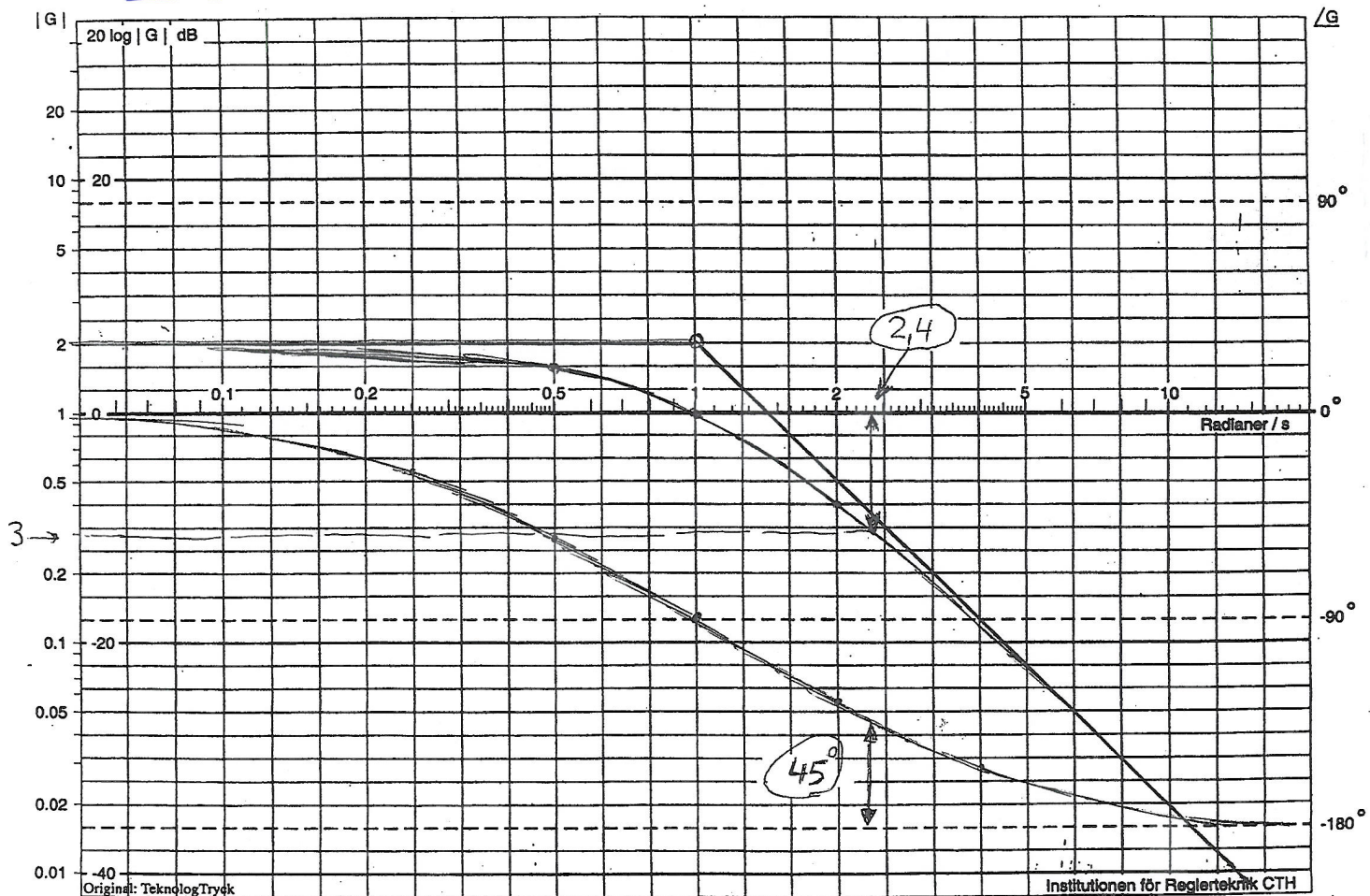
- För att få $\varphi_m = 45^\circ$ måste vi ha $\omega_c = 0,41 \text{ rad/s}$

$A(0,41) = 4 \Rightarrow K_I = \frac{1}{4} = 0,25 \Rightarrow \text{Välj } T_I = 4$

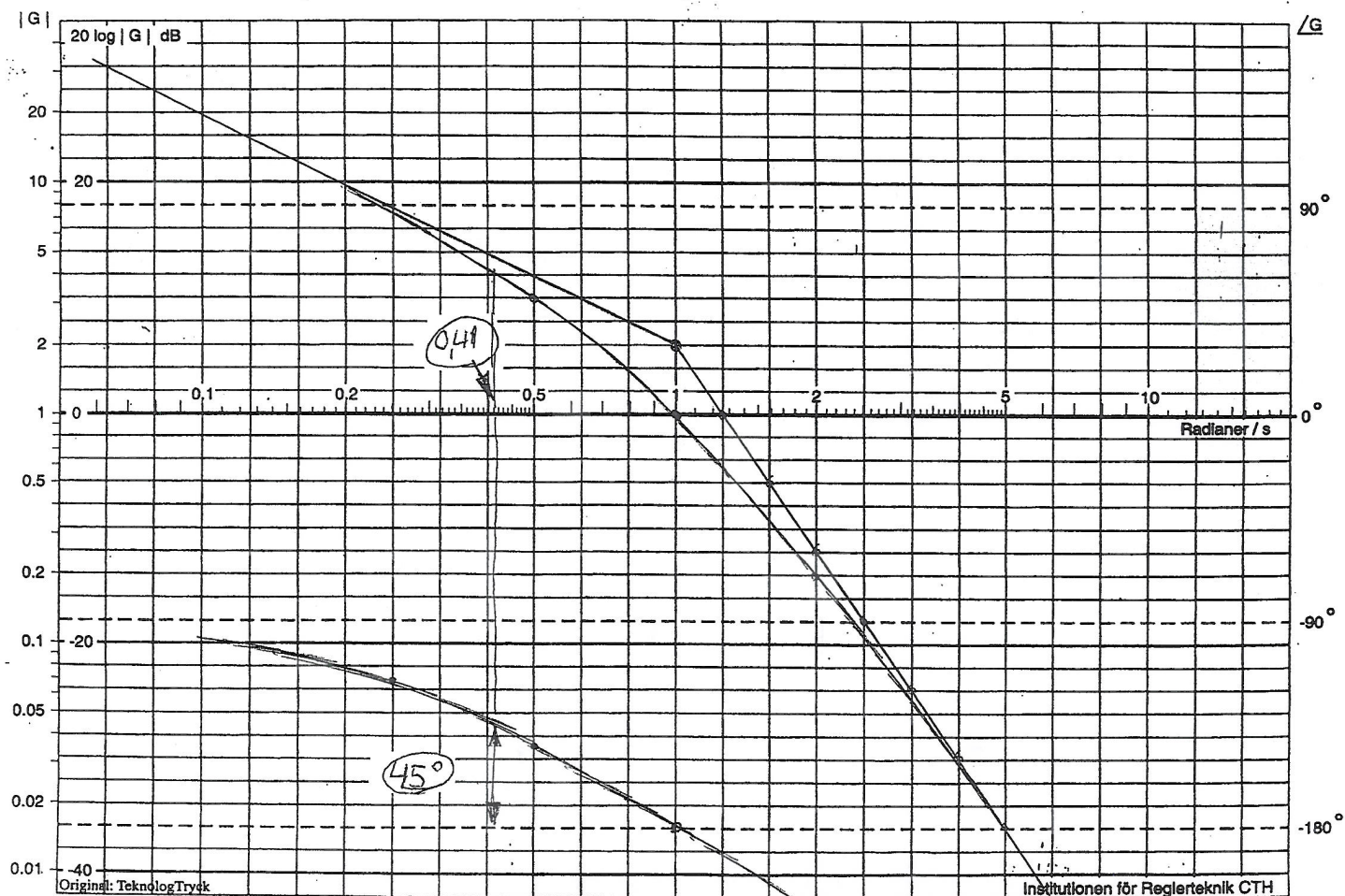
c)

	ω_c	$t_r \approx 1,4/\omega_c$
P	2,4 rad/s	0,58
I	0,41 rad/s	3,41

11.9 a



11.9 b



11.11. a)

Vi använder arbetsmetodiken för PI-regulatorer (avsnitt 11.3 i faktaboken)

Önskad fasmargin $\phi_m = 45^\circ$

$\Rightarrow$ Sök den frekvens där fasreserven (avståndet till -180°) är $45 + 11 = 56^\circ$

$$\omega = 1,7 \text{ rad/s}$$

$$|G(1,7)| \approx 0,55 \Rightarrow \text{Välj } K = \frac{1}{0,55} = 1,8 \text{ (5dB)}$$

Välj slutligen T_I så att brytfrekvensen

för PI-regulatorn blir $0,2 \cdot \omega_c$:

$$T_I = \frac{1}{0,2 \cdot 1,7} = 2,94$$

$$J_v = \frac{1}{K_I} = \frac{1}{K \frac{T_I}{T_I}} = \frac{T_I}{K} = \frac{2,94}{1,8} = 1,63$$

b) Löses på samma sätt som 11.11 a

11.12

Ledtråd:

Prova dig fram med Matlab. Använd kommandot margin som direkt ger fasmarginalen.

Använd kretsöverföringen

$$G_K(s) = \frac{K(1+T_I s)}{(1+s)^2(1+0,05s) \cdot T_I s}$$

Använd följande formel för J_v

$$J_v = \frac{1}{K_I} = \frac{T_I}{K}$$

11.15

Ledträd för att lösa uppgiften

1. Bestäm överföringsfunktionen med stegsvarsanalys (kapitel 7.6)

$$\begin{cases} \text{Dödtid } 1,5s \\ \text{Tidskonstant } 3s \\ \text{Statisk först. } 5 \end{cases} \Rightarrow G(s) = \frac{5e^{-1,5s}}{1+3s}$$

2. Bestäm lämplig regulatortyp

Pga kraven $e_0 = 0$ och $e_v = 0$ måste vi ha en regulator med integralverkan

$$\text{Alt 1 I-regulator} \quad G_R = \frac{1}{T_I s}$$

$$\text{Alt 2 PI-regulator} \quad G_R = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

(Det finns många lösningar på denna uppgift)

3. Bestäm parametrarna i regulatorn

- I fall 1 (I-regulator) kan samma metod användas som i uppgift 10.9 b
- I fall 2 (PI-regulator) kan arbetsmetodiken i kapitel 10.3 användas

4. Beräkning av J_v

$$\text{• I fall 1 gäller } J_v = \frac{1}{K_I} = T_I$$

$$\text{• I fall 2 gäller } J_v = \frac{1}{K_I} = \frac{T_I}{K}$$

11.15 b) Löses med samma metod som uppgift 11.2.

$$J_V = \frac{T_I}{K}$$

11.16 Systemets kretsöverföring är

$$G_K = \frac{3e^{-Ts}}{s(1+s)} \Rightarrow G_K(j\omega) = \frac{3e^{-j\omega}}{j\omega(1+j\omega)}$$

$$|G_K| = \frac{3}{\omega \sqrt{1+\omega^2}} \quad \angle G_K = -T\omega\left(\frac{180}{\pi}\right) - 90 - \arctan(\omega)$$

Dödkoden påverkar inte amplitudkurvan.
Vi beräknar den frekvens där $|G_K| = 0,5$
(motsv amplitudmarginalen $A_m = 2$)

$$\frac{3}{\omega \sqrt{1+\omega^2}} = 0,5 \Rightarrow \omega \sqrt{1+\omega^2} = 6$$

$$\Rightarrow \omega^2(1+\omega^2) = 36 \Rightarrow \omega^4 + \omega^2 - 36 = 0$$

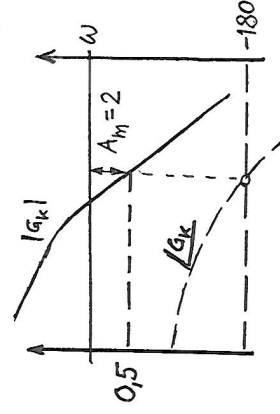
$$\Rightarrow \text{Sätt } p = \omega^2 \Rightarrow p^2 + p - 36 = 0$$

$$\Rightarrow p = -0,5 \pm \sqrt{36,25} = 5,52 \Rightarrow \omega = 2,35$$

För att få $A_m = 2$ ggr krävs att $\angle G_K(2,35) = -180^\circ$

$$\Rightarrow -T \cdot \underbrace{2,35 \left(\frac{180}{\pi}\right)}_{134,63} - 90^\circ - \underbrace{\arctan(2,35)}_{66,95} = -180^\circ$$

$$\Rightarrow T \cdot 134,63 = 23,05 \Rightarrow T = 0,171$$



Svar : $\text{Max}(T) = 0,171$

11.17

$$G_{TOT} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{K}{(1+0,1s)s(1+Ts)}}{1 + \frac{K}{(1+0,1s)s(1+Ts)}} = \frac{K}{(1+0,1s)s(1+Ts) + K} = \frac{K}{0,1Ts^3 + (T+0,1)s^2 + s + K}$$

Routh's metod ger

s^3	0,1 T	1
s^2	T+0,1	K
s^1	$\frac{T+0,1-0,1KT}{T+0,1}$	0
s^0	K	

Stabilitetsvillkor

$$T + 0,1 - 0,1KT > 0$$

$$\Rightarrow 0,1KT < T + 0,1$$

$$\Rightarrow K < \frac{T+0,1}{0,1T}$$

Den kritiska förstärkningen är

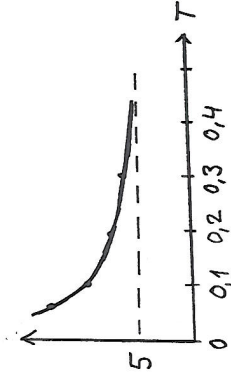
$$K_{max} = \frac{T+0,1}{0,1T}$$

För att få amplitudmarginalen 2 krävs:

$$K = \frac{K_{max}}{2} = \frac{T+0,1}{0,2T} = 5 + \frac{1}{2T}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K = 5^+$$

Större tidskonstant
kräver lägre
förstärkning.



12.4

Enligt uppgiften ska den totala
överföringsfunktionen $R \rightarrow Y$ uppfylla
följande krav

Tidskonstanter

$$T=2 \text{ resp } T=3$$

Inget kvarstående fel

$$\text{dvs } |G_{TOT}(0)| = 1$$

$$\Rightarrow G_{TOT} = \frac{1}{(1+2s)(1+3s)}$$

Formlerna i kapitel 12.4 ger därför

$$G_R = \frac{G_{TOT}}{G_P(1-G_{TOT})} = \frac{\frac{1}{(1+2s)(1+3s)}}{\frac{5}{(1+4s)(1+6s)} \left[1 - \frac{1}{(1+2s)(1+3s)} \right]}$$

$$= \frac{(1+4s)(1+6s)}{5[(1+2s)(1+3s)-1]} = \frac{(1+4s)(1+6s)}{5(6s^2+5s)} =$$

$$= \frac{24s^2 + 10s + 1}{30s^2 + 25s}$$

$$12.6 \ a) \ \begin{cases} G_p = \frac{3}{s(1+4s)} \\ G_{TOT} = \frac{1}{1+2s} \end{cases}$$

$$G_R = \frac{G_{TOT}}{G_p(1 - G_{TOT})} = \frac{\frac{1}{1+2s}}{\frac{3}{s(1+4s)} \left[1 - \frac{1}{1+2s} \right]} =$$

$$= \frac{s(1+4s)}{3[1+2s-1]} = \frac{s(1+4s)}{6s} = \frac{1}{6}(1+4s)$$

b) Det är en PD-regulator med $K = \frac{1}{6}$ och $T_D = 4$

12.8

Vi börjar med att dimensionera en PI-regulator för den "dödlidsfria" processen (enligt metod kap 12.4)

$$\text{Process } G_p = \frac{1}{(1+s)^3} \quad G_p(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^3}$$

Bestäm K_0 och T_0 enligt Ziegler-Nichols

$$\varphi(\omega) = -3 \arctan(\omega) = -180$$

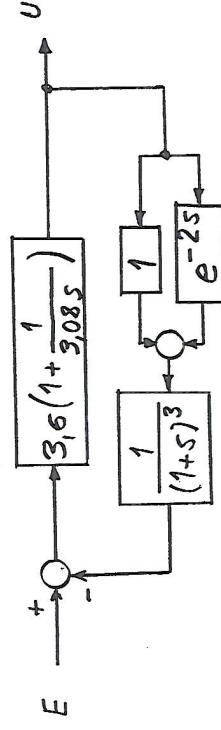
$$\Rightarrow \arctan(\omega) = 60 \Rightarrow \omega_H = 1,732 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_H} = 3,628 \text{ s}$$

$$K_0 = \frac{1}{|G_p(\omega_H)|} = \frac{1}{\frac{1}{(1+1,732^2)^{3/2}}} = (1+3)^{3/2} = 8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = 3,628 \\ K_0 = 8 \end{array} \right\} \text{ Ziegler-Nichols ger: } \left\{ \begin{array}{l} K = 3,6 \\ T_i = 3,08 \end{array} \right.$$

Enligt kap 12.4 ska regulatorn ha följande struktur



12.10 a) $G_F = \frac{0.1}{s(1+5s)}$ $G_{TOT} = \frac{1}{(1+Ts)^2}$

Formler i kap 12.4 ger

$$G_R = \frac{G_{TOT}}{G_F(1-G_{TOT})} = \frac{\frac{1}{(1+Ts)^2}}{\frac{0.1}{s(1+5s)} \left(1 - \frac{1}{(1+Ts)^2}\right)} =$$

$$= \frac{s(1+5s)}{0.1((1+Ts)^2 - 1)} = \frac{10 \cdot s(1+5s)}{Ts^2 + 2Ts} = \frac{10(1+5s)}{T(2+Ts)}$$

Om $T=5$ fås $G_R = \frac{1+5s}{1+2.5s}$ (Lead-filter)

Om $T=4$ fås $G_R = 1.25 \cdot \frac{1+5s}{1+2s}$ (Lead-filter)

b) Max styrsignal för Lead-filter fås vid tiden $t=0^+$. Begynnelsevärderatsen ger:

$$\begin{aligned} \max(u) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{0.3}{s} \cdot 1.25 \cdot \frac{1+5s}{1+2s} = \\ &= 0.3 \cdot 1.25 \cdot 2.5 = 0.9375 \text{ rad} \end{aligned}$$

c) Kretsöverföringen blir

$$G_K = \frac{0.1}{s(1+5s)} \cdot \frac{10(1+5s)}{T(2+Ts)} = \frac{1}{Ts(2+Ts)}$$

$$G_K(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega(2+Tj\omega)} \quad \angle G_K = -90^\circ - \arctan\left(\frac{T\omega}{2}\right)$$

Bestäm den frekvens ω_c där $|G_K|=1$

$$|G_K| = \frac{1}{T\omega \sqrt{4+T^2\omega^2}} = 1$$

$$\Rightarrow T^2\omega^2(4+T^2\omega^2) = 1 \quad \text{Sätt } T^2\omega^2 = p$$

$$\Rightarrow p(4+p) = 1$$

$$\Rightarrow p^2 + 4p - 1 = 0$$

$$\Rightarrow p = -2 \pm \sqrt{4+1} = -2 \pm \sqrt{5} = 0.236$$

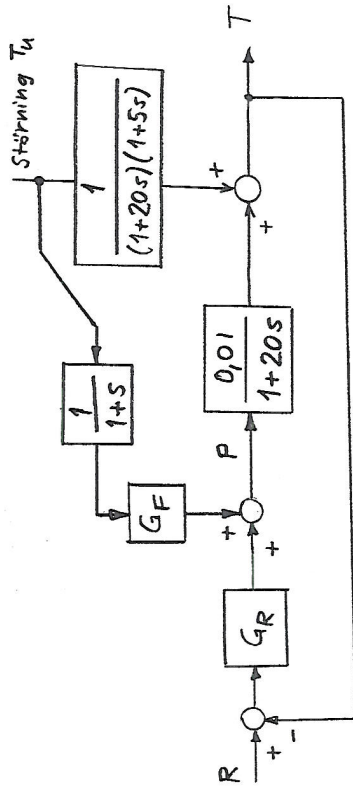
$$\Rightarrow \omega_c = \frac{\sqrt{p}}{T} = \frac{0.4859}{T}$$

$$\phi_m = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan\left(\frac{0.4859}{2}\right) = 76.3^\circ$$

(fasmarginen är oberoende av T , den kan även bestämmas med Bodediagram för G_K)

12.11

Strukturen på framkopplingen ger av följande blockschema



För att eliminera inverkan av störningen krävs:

$$T_u \cdot \frac{1}{(1+s)} \cdot G_F \cdot \frac{0.01}{(1+20s)} = -T_u \cdot \frac{1}{(1+20s)(1+5s)}$$

Vilket ger:

$$G_F = \frac{-100(1+s)}{(1+5s)}$$

14.1

a) $y''' + 5y'' + 3y' + 7y = 5u$

$$\Rightarrow Ys^3 + 5Ys^2 + 3Ys + 7Y = 5U$$

$$Y(s^3 + 5s^2 + 3s + 7) = 5U$$

$$\Rightarrow G = \frac{Y}{U} = \frac{5}{s^3 + 5s^2 + 3s + 7}$$

Formel för omvandling till tillståndsmodell ger:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

e)

$$G(s) = \frac{2s^2 + 15s + 5}{s^2 + 5s + 2} = \frac{2(s^2 + 5s + 2) + 5s + 1}{s^2 + 5s + 2} =$$

$$= 2 + \frac{5s + 1}{s^2 + 5s + 2} = \frac{Y}{U}$$

Direkt koppling

Enligt formler för omskrivning f.d.s

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2u$$

14.4 b) Varje block med första ordningens överföringsfunktion görs om till en diff-ekvation:

Vi får

$$\frac{x_1}{u} = \frac{3}{2+s} \Rightarrow x_1(2+s) = 3u \Rightarrow x_1 s + 2x_1 = 3u$$

Inverstransformering ger

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 3u$$

$$\frac{x_2}{u} = \frac{5}{4+2s} \Rightarrow x_2(4+2s) = 5u \Rightarrow 2x_2 s + 4x_2 = 5u$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = -2x_2 + 2.5u$$

$$\frac{x_3}{x_1+x_2} = \frac{4}{3+s} \Rightarrow x_3(3+s) = 4(x_1+x_2) \Rightarrow x_3 s + 3x_3 = 4x_1 + 4x_2$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3 = -3x_3 + 4x_2 + 4x_1$$

På matrisform fås

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Den sista ekvationen motsvarar det sista blocket där $y = 3x_3$

Formel som används

14.3 a) $G = C(sI-A)^{-1}B$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-3 & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-3)(s-2)-1} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s-3 \end{bmatrix}$$

$s^2 - 5s + 5$

$$C(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - 5s + 5} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$G = C(sI-A)^{-1} \cdot B = \frac{1}{s^2 - 5s + 5} \begin{bmatrix} s-1 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2s-4}{s^2 - 5s + 5}$$

b) På samma sätt fås

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+4)(s-2)+1} \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}$$

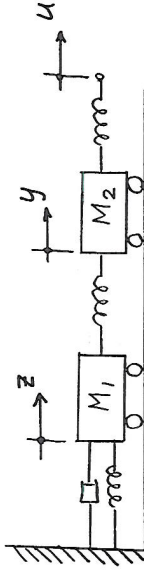
$s^2 + 2s - 7$

$$C(sI-A)^{-1} = \dots = \frac{1}{s^2 + 2s - 7} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 3s+12 \end{bmatrix}$$

$$G = C(sI-A)^{-1} \cdot B = \dots = \frac{5s+14}{s^2 + 2s - 7}$$

Enligt formel för invertering av 2x2-matriser

14.7



Newton's 2:a lag ger

Massa 1: $M_1 \ddot{z} = k(y-z) - k z - b \dot{z}$ (1)

Massa 2: $M_2 \ddot{y} = k(u-y) - k(y-z)$ (2)

Välj följande tillståndsvariabler $\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = \dot{z} \\ x_3 = y \\ x_4 = \dot{y} \end{cases}$
 $\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$
 $\Rightarrow \dot{x}_3 = x_4$

Byte till tillståndsvariabler ger

(1) $\Rightarrow M_1 \dot{x}_2 = k(x_3 - x_1) - k x_1 - b x_2$

(2) $\Rightarrow M_2 \dot{x}_4 = k(u - x_3) - k(x_3 - x_1)$

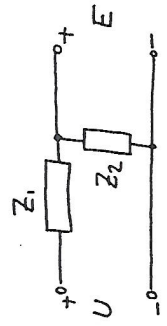
På matrisform fås

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{M_1} & -\frac{b}{M_1} & \frac{k}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M_2} & 0 & -\frac{2k}{M_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{M_2} u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Välj tillståndsvariablerna

$$\begin{cases} x_1 = e \\ x_2 = i \end{cases}$$



Förenklat schema med komplexa impedanser

$$Z_1 = R_1 + Ls$$

$$Z_2 = \frac{\frac{1}{sC} \cdot R_2}{\frac{1}{sC} + R_2} = \frac{R_2}{1 + R_2 C s}$$

Ekvationer för systemet:

$$\begin{cases} U = I(R_1 + Ls) + E & (1) \\ E = \frac{IR_2}{1 + R_2 C s} & (2) \end{cases}$$

Försök att ställa upp ekvationer som innehåller derivatorna av e och i.

(1) $\Rightarrow ILs = -E - I \cdot R_1 + U$

(2) $\Rightarrow ER_2 C s = -E + IR_2$

Omformning ger:

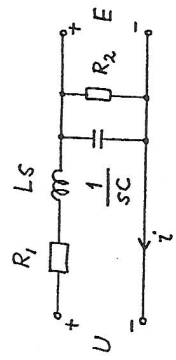
$$\begin{cases} I \cdot s = -E \left(\frac{1}{L} \right) - I \left(\frac{R_1}{L} \right) + U \left(\frac{1}{L} \right) \\ E \cdot s = -E \left(\frac{1}{R_2 C} \right) + I \left(\frac{1}{C} \right) \end{cases}$$

Ekvationer på tillståndsform:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

14.6 a)



14.8

Allmän lag: $\frac{dV}{dt} = u_{in} - u_{ut}$ där $V = Ah$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (u_{in} - u_{ut})$$

a) Tank 1: $\dot{X}_1 = u - K(X_1 - X_2)$

Tank 2: $\dot{X}_2 = K(X_1 - X_2) - K(X_2 - X_3)$

Tank 3: $\dot{X}_3 = K(X_2 - X_3) - KX_3$

På matrisform fås

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K & K & 0 \\ K & -2K & K \\ 0 & K & -2K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

där $K = 0,005$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

b) I stationärtillståndet gäller att $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = \dot{X}_3 = 0$.

Om vi sätter in $u = 0,5 \cdot 10^{-3}$ i tillståndsekvationen fås

därfor följande linära ekv-system för bestämning

av de stationära nivåerna:

$$\begin{bmatrix} -0,005 & 0,005 & 0 \\ 0,005 & -0,010 & 0,005 \\ 0 & 0,005 & -0,010 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösning av ekvationsystemet ger

$$\begin{cases} X_1 = 0,3 \\ X_2 = 0,2 \\ X_3 = 0,1 \end{cases}$$

14.10

Nivåbalans ger

$$\frac{dV}{dt} = u_{in} - u_{ut} \Rightarrow A \frac{dh}{dt} = u_1 + u_2 - u_3$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (u_1 + u_2 - u_3)$$

Energibalans ger

$$\begin{cases} P_{in} = u_1 g c T_1 + u_2 g c T_2 \\ P_{ut} = u_3 g c T \\ E = V T g c = A h T g c \end{cases} \quad \text{där}$$

$$\text{dus} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d(A h T g c)}{dt} = A g c \frac{d(h T)}{dt} = A g c \frac{d(h' T + h T')}{dt}$$

Konstanter bryts
ur derivatan

Enligt formel
för derivatan
av en produkt

Vi får alltså

$$A g c [h' T + h T'] = u_1 g c T_1 + u_2 g c T_2 - u_3 g c T$$

Förenkling

$$A [h' T + h T'] = u_1 T_1 + u_2 T_2 - u_3 T$$

$$\Rightarrow h T' = \frac{u_1 T_1 + u_2 T_2 - u_3 T}{A} - h' T = \frac{u_1 T_1 + u_2 T_2 - u_3 T - T(u_1 + u_2 - u_3)}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{u_1 (T_1 - T) + u_2 (T_2 - T)}{A h}$$

$$\text{tillstånds-} \quad \begin{cases} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (u_1 + u_2 - u_3) & (1) \\ \frac{dT}{dt} = \frac{1}{A h} [u_1 (T_1 - T) + u_2 (T_2 - T)] & (2) \end{cases}$$

Modellen är olinjär
pga produkter och
kvoter av variabler
i ekvation (2)

14.13

Energi balans för de två rummen ger

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dt} = Q_{gc} T_{in} - Q_{gc} T_1 - k_{10}(T_1 - T_0) - k_{12}(T_1 - T_2) + P \\ \frac{dE_2}{dt} = Q_{gc} T_1 - Q_{gc} T_2 + k_{12}(T_1 - T_2) - k_{20}(T_2 - T_0) \end{cases}$$

Här gäller att:

$$\begin{cases} E_1 = C_1 T_1 \\ E_2 = C_2 T_2 \end{cases} \quad \begin{cases} T_{in} = T_0 + 0,75(T_2 - T_0) = 0,75 T_2 + 0,25 T_0 \end{cases}$$

Dvs

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} [P + Q_{gc}(0,75 T_2 + 0,25 T_0) - Q_{gc} T_1 - k_{10}(T_1 - T_0) - k_{12}(T_1 - T_2)] \\ \frac{dT_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} [Q_{gc} T_1 - Q_{gc} T_2 + k_{12}(T_1 - T_2) - k_{20}(T_2 - T_0)] \end{aligned}$$

På matrisform får

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-Q_{gc} - k_{10} - k_{12}}{C_1} & \frac{0,75 Q_{gc} + k_{12}}{C_1} \\ \frac{Q_{gc} + k_{12}}{C_2} & \frac{-Q_{gc} - k_{12} - k_{20}}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{0,25 Q_{gc} + k_{10}}{C_1} \\ 0 & \frac{k_{20}}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ T_0 \end{bmatrix}$$

Med siffror får

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,371 \cdot 10^{-4} & 1,097 \cdot 10^{-4} \\ 1,097 \cdot 10^{-4} & -1,371 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-7} & 5,32 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 5 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ T_0 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

14.15

Vid byte av tillståndsvariabler $\bar{X} = T X$ gäller

$$N_y \begin{cases} \tilde{A} = T A T^{-1} \\ \tilde{B} = T B \\ \tilde{C} = C T^{-1} \\ \tilde{D} = D \end{cases}$$

I vårt fall har vi

$$\begin{bmatrix} T_m \\ T_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad \text{dvs } T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi får alltså

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0,2 & -0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} -0,05 & -0,05 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{0,5+0,5} \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\text{dvs} \quad \begin{bmatrix} \dot{T}_m \\ \dot{T}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m \\ T_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ P \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m \\ T_s \end{bmatrix}$$

16.1 a) Signalen är summan av tre förskjutna enhetspulser $P_e(k)$

$$f(k) = P_e(k-1) + P_e(k-2) + P_e(k-3)$$

$$\Rightarrow F(z) = 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

b) Signalen är en digital rampfunktion med

lutningen 0,25

$$f(k) = 0,25 \cdot k \quad \text{för } k > 0$$

$$\Rightarrow F(z) = 0,25 \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

c) En förskjutten enhetsramp

$$\begin{cases} f(k) = 0 & k < 2 \\ f(k) = k-2 & k > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(z) = z^{-2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(z-1)^2}$$

$$\underline{16.3} \quad f(k) = 2[P_e(k-1) + P_e(k-4) + P_e(k-7) + \dots]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(z) &= 2(z^{-1} + z^{-4} + z^{-7} + \dots) = 2z^{-1}(1 + z^{-3} + z^{-6} + \dots) = \\ &= 2z^{-1}((z^{-3})^0 + (z^{-3})^1 + (z^{-3})^2 + (z^{-3})^3 + \dots) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ehligt formel} \\ \text{för oändlig} \\ \text{summa} \end{array} \right\} \\ &= 2z^{-1} \cdot \frac{1}{1-z^{-3}} \end{aligned}$$

16.4

a) $y(k) = 0,5 y(k-1) + 3u(k-1)$

Flytta över alla y-termer till vänster sida

$$y(k) - 0,5 y(k-1) = 3u(k-1)$$

z-transformering ger

$$Y - 0,5 Y z^{-1} = 3U z^{-1}$$

$$Y(1 - 0,5 z^{-1}) = 3U z^{-1}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{3 z^{-1}}{1 - 0,5 z^{-1}}$$

b) Samma metod som ovan ger:

$$y(k) - 0,5 y(k-1) - 0,2 y(k-2) - 0,5 y(k-3) = u(k-1) + 2u(k-2)$$

$$\Rightarrow Y - 0,5 Y z^{-1} - 0,2 Y z^{-2} - 0,5 Y z^{-3} = U z^{-1} + 2U z^{-2}$$

$$\Rightarrow Y[1 - 0,5 z^{-1} - 0,2 z^{-2} - 0,5 z^{-3}] = U[z^{-1} + 2z^{-2}]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 0,5 z^{-1} - 0,2 z^{-2} - 0,5 z^{-3}}$$

16.5 a) Här går vi motsatt håll jämfört när vi går från differensekvation till överföringsfunktion

$$H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 0,5z^{-1} + 0,2z^{-2}}$$

$$\Rightarrow Y(1 + 0,5z^{-1} + 0,2z^{-2}) = U(z^{-1} + 2z^{-2})$$

$$\Rightarrow y(k) + 0,5y(k-1) + 0,2y(k-2) = u(k-1) + 2u(k-2)$$

eller

$$y(k) = -0,5y(k-1) - 0,2y(k-2) + u(k-1) + 2u(k-2)$$

d) Här skriver vi först om till negativ representation

$$H(z) = \frac{3z^{-2} - z^{-3}}{1 + 0,1z^{-2} + z^{-3}} = \frac{Y}{U}$$

$$\Rightarrow Y(1 + 0,1z^{-2} + z^{-3}) = U(3z^{-2} - z^{-3})$$

Inverstransformering ger

$$y(k) + 0,1y(k-2) + y(k-3) = 3u(k-2) - u(k-3)$$

eller

$$y(k) = -0,1y(k-2) - y(k-3) + 3u(k-2) - u(k-3)$$

16.6 a) $y(k) = y(k-1) + 2u(k-1)$

$$\Rightarrow y(k) - y(k-1) = 2u(k-1)$$

$\xrightarrow{\text{z-transformera}}$ $Y - Yz^{-1} = 2Uz^{-1} \Rightarrow Y(1 - z^{-1}) = 2Uz^{-1}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{2z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Insignal: Stegfunktion, dvs $U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$

Utsignalens transform blir:

$$Y(z) = U(z) \cdot H(z) = \frac{2z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Motsvarande tidsfunktion blir:

$$y(k) = 2k \quad \text{för } k > 0$$

(Detta är en rampfunktion - Processen är en tidsdiskret integrerande process)

b) $y(k) = 0,5y(k-1) + 2u(k-1)$

$$\Rightarrow Y - 0,5Yz^{-1} = 2Uz^{-1}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{2z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Utsignalens transform blir

$$Y(z) = U(z) \cdot H(z) = \frac{2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,5z^{-1})}$$

Tabell över z-Transformer ger att

TRANSFORM $\rightarrow$ $\frac{(1-e^{-a})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-a}z^{-1})} \Leftrightarrow 1 - e^{-ak}$ $\rightarrow$ TIDS FUNKTION

I vårt fall gäller:

$$e^{-a} = 0,5 \quad \text{dvs} \quad (1 - e^{-a}) = 0,5$$

Vi får sålunda

$$y(k) = 4(1 - 0,5^k) \quad \text{för } k \geq 0$$

16.8 a $y(k) = 1,3 y(k-1) - 0,5 y(k-2) + u(k-1) + u(k-2)$

Den iterativa metoden ger:

k	Insignal				y(k)				Utsignal
	u(k)	u(k-1)	u(k-2)		-0,5 y(k-2)	1,3 y(k-1)		y(k)	
0	1	0	0		0	0		0	0
1	1	1	0		0	0		1	1
2	1	1	1		0	1,3		3,3	3,3
3	1	1	1		-0,5	4,29		5,79	5,79
4	1	1	1		-1,65	7,527		7,877	7,877
5	1	1	1		-2,895	10,2401		9,345	9,345
6	1	1	1		-3,94	12,1486		10,209	10,209
7	1	1	1		-4,673	13,271		10,599	10,599
8	1	1	1						

17.1 b) Enligt formelsamling gäller

$$\frac{K}{1+Ts} \Leftrightarrow \frac{K(1-e^{-h/T})}{z - e^{-h/T}}$$

↑ Analog process
↖ Motsv. tids-diskreta process

I vårt fall har vi $\begin{cases} h=2 \\ K=5 \\ T=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{5(1-e^{-2})}{z - e^{-2}} = \frac{4,32}{z - 0,135}$$

$$= \frac{4,32 z^{-1}}{1 - 0,135 z^{-1}}$$

e) Formelsamling ger

$$\frac{K}{s^2} \Leftrightarrow \frac{Kh^2}{2} \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

I vårt fall har vi $\begin{cases} h=2 \\ K=10 \end{cases}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{10 \cdot 2^2}{2} \cdot \frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1 - 2z^{-1} + z^{-2})} =$$

$$= 20 \cdot \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

17.3

Tidsdiskret ö-funktion

$$H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{2z^{-1}}{1 - 0,68z^{-1}}$$

Gäller då $h=1s$

Formelsamling ger

$$\frac{K(1 - e^{-h/T})z^{-1}}{1 - e^{-h/T}z^{-1}} \Leftrightarrow \frac{K}{1+Ts}$$

↑ Tids diskret
↖ Analog

Jämförelse ger

$$e^{-h/T} = e^{-1/T} = 0,68 \Rightarrow -\frac{1}{T} = \ln 0,68 \Rightarrow T = 2,59$$

$$K(1 - e^{-h/T}) = 2 \Rightarrow K = \frac{2}{1 - 0,68} = 6,25$$

Vi får alltså

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{6,25}{1 + 2,59s}$$

Motsvarande differentialekv:

$$Y(1 + 2,59s) = 6,25 U$$

$$\Rightarrow 2,59 y' + y = 6,25 u$$

17.5 ① Gör om till en överföringsfunktion $H(z)$

$$Y(1 - 0,8465 z^{-1}) = 0,7676 \cdot U \cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{0,7676 z^{-1}}{1 - 0,8465 z^{-1}} \quad h=2$$

② Bestäm motsvarande analoga ö-funktion $G(s)$

$$\text{Tabell ger: } \frac{K}{1+Ts} \Leftrightarrow \frac{K(1-e^{-h/T})z^{-1}}{1-e^{-h/T}z^{-1}}$$

$$\text{dvs } e^{-2/T} = 0,8465 \Rightarrow -\frac{2}{T} = \ln 0,8465$$

$$\Rightarrow T = -\frac{2}{\ln 0,8465} = 12$$

$$K(1 - 0,8465) = 0,7676 \Rightarrow K = 5$$

$$\text{Analog process } G(s) = \frac{5}{1+12s}$$

③ Ny diskretisering vid samplingsintervallet $h=1$

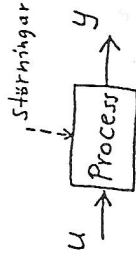
$$H(z) = \frac{5(1 - e^{-1/12})z^{-1}}{1 - e^{-1/12}z^{-1}} = \frac{0,40 z^{-1}}{1 - 0,92 z^{-1}}$$

④ Gör om till en differensekvation

$$\frac{Y}{U} = \frac{0,40 z^{-1}}{1 - 0,92 z^{-1}} \Rightarrow y(k) = 0,92 \cdot y(k-1) + 0,4 \cdot u(k-1)$$

Differensekvationen beskriver hur processen beter sig (vid samplingsögonblicken) om den styrs med en styckvis konstant insignal u

17.8



Antaget samband mellan u och y :

$$y(k) = b_1 \cdot u(k-1) + b_2 \cdot u(k-2)$$

Överbästämt ekvationssystem:

$$\begin{cases} y(4) = b_1 \cdot u(3) + b_2 \cdot u(2) \\ y(3) = b_1 \cdot u(2) + b_2 \cdot u(1) \\ y(2) = b_1 \cdot u(1) + b_2 \cdot u(0) \end{cases}$$

På matrisform, med insatta värden fås:

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -2,4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 y A r (parametervektor)

Ekvationssystemet ska lösas i minsta kvadratmetodens mening, dvs.

$$r = (A^T A)^{-1} \cdot A^T y$$

Enligt lineära algebra fås:

$$A^T A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 9 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{21 \cdot 14 - 9^2} \begin{bmatrix} 14 & -9 \\ -9 & 21 \end{bmatrix} = \frac{1}{213} \begin{bmatrix} 14 & -9 \\ -9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^T y = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ -2,4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,8 \\ 20,6 \end{bmatrix}$$

dvs. vi får

$$r = (A^T A)^{-1} \cdot A^T y = \frac{1}{213} \begin{bmatrix} 14 & -9 \\ -9 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35,8 \\ 20,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,483 \\ 0,518 \end{bmatrix}$$

dvs. differenskvationen blir

$$y(k) = 1,483 \cdot u(k-1) + 0,518 \cdot u(k-2)$$

Motsvarande överföringsfunktion är

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 1,483 \cdot z^{-1} + 0,518 \cdot z^{-2}$$

18.1 a) Vid blockschema-förenklningar gäller samma formler som i analoga fallet

$$\begin{aligned} H_{tot} = \frac{Y}{R} &= \frac{\frac{z}{(z-1)} \cdot \frac{2z+1}{z^2-0,8z+0,5}}{1 + \frac{z}{(z-1)} \cdot \frac{2z+1}{z^2-0,8z+0,5}} \\ &= \frac{z(2z+1)}{(z-1)(z^2-0,8z+0,5) + z(2z+1)} \\ &= \frac{2z^2+z}{z^3+0,2z^2+2,3z-0,5} \end{aligned}$$

18.3

$$H(z) = \frac{3,5}{z-0,8}$$

Byt alla z mot $e^{j\omega h}$
där $h=1$ för att få
frekvensfunktioner

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{3,5}{e^{j\omega} - 0,8} = \frac{3,5}{\cos \omega + j \sin \omega - 0,8}$$

$$\Rightarrow A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{3,5}{\sqrt{(\cos \omega - 0,8)^2 + \sin^2 \omega}} =$$

$$= \frac{3,5}{\sqrt{\cos^2 \omega - 1,6 \cos \omega + 0,64 + \sin^2 \omega}} = \frac{3,5}{\sqrt{1,64 - 1,6 \cos \omega}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\sin \omega}{\cos \omega - 0,8}\right)$$

18.4 a) Lågfrekvensförstärkningen får genom att byta alla z mot 1 i överföringsfunktionen:

$$K_{LF} = H(1) = \frac{3+1}{1-1,6+0,63} = \frac{4}{0,03} = 133,3$$

b) $K_{LF} = H(1) = \frac{3+1}{1-2,4+1,92-0,512} = \frac{4}{0,008} = 500$

18.6 c) $H(z) = \frac{3z+1}{z^2-1,6z+0,63}$ Använd polbestämning!

Kar. ekv $z^2-1,6z+0,63=0$

$$\Rightarrow z = 0,8 \pm \sqrt{0,8^2-0,63} = 0,8 \pm 0,1$$

$$\begin{cases} z_1 = 0,7 \\ z_2 = 0,9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{STABILITÄT} \\ \text{Båda poler inom} \\ \text{enhetscirkeln} \end{array}$$

e) Kar. ekv $z^2-1,4z+0,4=0$

$$\Rightarrow z = 0,7 \pm \sqrt{0,7^2-0,4} = 0,7 \pm \sqrt{0,09} = 0,7 \pm 0,3 \quad \begin{cases} z_1 = 0,4 \\ z_2 = 1,0 \end{cases}$$

På stabilitetsgränsen
(En pol på enhetscirkeln)

18.7 a) Total överföringsfunktion blir:

$$H_{tot} = \frac{\frac{2Kz^{-1}}{1-z^{-1}}}{1 + \frac{2Kz^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{2Kz^{-1}}{1-z^{-1}+2Kz^{-1}} = \frac{2Kz^{-1}}{1+(2K-1)z^{-1}}$$

Kar. ekv $1+(2K-1)z^{-1}=0$
 $\Rightarrow z+(2K-1)=0$
 $\Rightarrow z=1-2K$

Stab. villkor $1-2K > -1 \Rightarrow 2K < 2$
 $\Rightarrow \boxed{K < 1}$

b) $H_{tot} = \frac{\frac{K}{(z-1)(z-0,5)}}{1 + \frac{K}{(z-1)(z-0,5)}} = \frac{K}{(z-1)(z-0,5)+K}$
 $= \frac{K}{z^2-1,5z+(0,5+K)}$

Kar. ekv $z^2-1,5z+(0,5+K)=0$
 $\Rightarrow z = 0,75 \pm \sqrt{0,5625-K-0,5} = 0,75 \pm \sqrt{0,0625-K}$

Vi får skilja på 2 fall:

Fall 1 Om $0 < K < 0,0625$

I detta fall har vi reella poler (positivt under roten)

Eftersom $\sqrt{0,0625} = 0,25$ gäller att polen kan skrivas

$$Z = 0,75 \pm p \quad \text{där } p < 0,25$$

Dvs. Båda poler ligger inom enhetscirkeln.
(Inget problem med instabilitet i detta fall)

Fall 2 Om $K > 0,0625$

I detta fall har vi komplexa poler (negativt under roten)

Vi får

$$Z = 0,75 \pm \sqrt{\underbrace{0,0625 - K}_{\text{negativt tal}}} = 0,75 \pm \sqrt{-1(K - 0,0625)} = 0,75 \pm j\sqrt{K - 0,0625}$$

Vilket ger: $|Z| = \sqrt{0,75^2 + (K - 0,0625)} =$

$$= \sqrt{0,5625 + K - 0,0625} = \sqrt{0,5 + K}$$

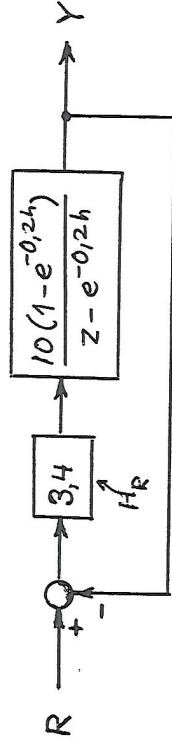
Stabilitetsvillkor $|Z| < 1$

$$\Rightarrow 0,5 + K < 1 \Rightarrow K < 0,5$$

Svar: $K < 0,5$

18.9 b $G(s) = \frac{10}{1+5s} = \frac{2}{1+0,2s}$

Diskretisering ger $H(z) = \frac{10(1-e^{-0,2h})}{z-e^{-0,2h}}$

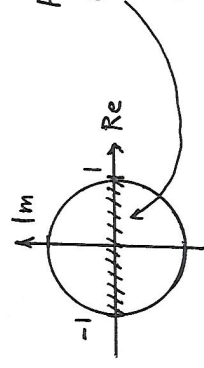


Total överföringsfunktion

$$H_{tot} = \frac{H_R H}{1 + H_R H} = \dots = \frac{34(1-e^{-0,2h})}{z - e^{-0,2h} + 34(1-e^{-0,2h})}$$

Kar, ekv $\Rightarrow z + 34 - 35e^{-0,2h} = 0$

Pol $\Rightarrow z = 35e^{-0,2h} - 34$ (reell pol)



För stabilitet måste polen ligga inom enhetscirkeln.

Villkor: $35e^{-0,2h} - 34 > -1$

$$\Rightarrow 35e^{-0,2h} > 33$$

$$\Rightarrow e^{-0,2h} > \frac{33}{35}$$

$$\Rightarrow -0,2h > \ln\left(\frac{33}{35}\right)$$

$$\Rightarrow h < -5 \cdot \ln\left(\frac{33}{35}\right) = 0,294$$

Svar: $\max(h) = 0,294$

19.1

$$G(s) = \frac{3}{s}$$

a) Euler-transformen: Byt s mot $s = \frac{z-1}{zh}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{3z}{z-1}$$

b) Bilineär transform: Byt s mot $s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{3(z+1)}{2(z-1)}$$

19.2 $G(s) = \frac{1+2s}{1+5s}$

a) Euler-transformen $s = \frac{z-1}{zh}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 + 2\left(\frac{z-1}{zh}\right)}{1 + 5\left(\frac{z-1}{zh}\right)} = \frac{zh + 2(z-1)}{zh + 5(z-1)} = \frac{z(2+h) - 2}{z(5+h) - 5}$$

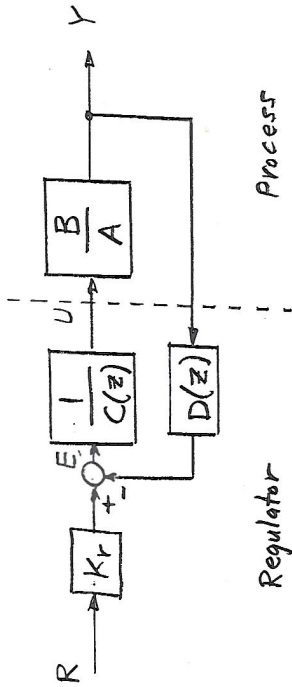
$$h=0,1 \text{ ger} \Rightarrow H(z) = \frac{2,1z-2}{5,1z-5}$$

b) Bilineär transform $s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(z) &= \frac{1 + \frac{4(z-1)}{h(z+1)}}{1 + \frac{10(z-1)}{h(z+1)}} = \frac{h(z+1) + 4(z-1)}{h(z+1) + 10(z-1)} = \\ &= \frac{z(4+h) + (h-4)}{z(10+h) + (h-10)} \end{aligned}$$

$$h=0,1 \text{ ger} \Rightarrow H(z) = \frac{4,1z - 3,9}{10,1z - 9,9}$$

19.5 Process $H(z) = \frac{B}{A} = \frac{0,65z^{-1} + 0,35z^{-2}}{1 - 0,75z^{-1}}$



Arbetsmetodiken (kap 18) ger:

①
$$\begin{cases} n_p = n_a + n_b - 1 = 1 + 2 - 1 = 2 \\ n_c = n_b - 1 = 2 - 1 = 1 \\ n_d = n_a - 1 = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Vi ska alltså ha följande "utseende" på C- och D-polynomen

$$\begin{cases} C(z) = 1 + c_1 z^{-1} & (\text{grad } 1) \\ D(z) = d_0 & (\text{grad } 0) \end{cases}$$

② Det önskade karakteristiska polynomet blir:

$$P(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) = (1 - 0,5z^{-1})^2 = 1 - z^{-1} + 0,25z^{-2}$$

Skrives direkt i negativ representation

③ Polplaceringsekvationen $AC + BD = P$

$$(1 - 0,75z^{-1})(1 + c_1 z^{-1}) + (0,65z^{-1} + 0,35z^{-2})d_0 = 1 - z^{-1} + 0,25z^{-2}$$

Hopmultiplicering + Sammanföring av termer med samma gradtal ger:

$$1 + (c_1 - 0,75 + 0,65d_0)z^{-1} + (0,35d_0 - 0,75c_1)z^{-2} = 1 - z^{-1} + 0,25z^{-2}$$

Vi får följande ekvationssystem

$$\begin{cases} c_1 - 0,75 + 0,65d_0 = -1 \\ 0,35d_0 - 0,75c_1 = 0,25 \end{cases}$$

Ekvationssystemet har lösningen

$$\begin{cases} c_1 = -0,2985 \\ d_0 = 0,07463 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} C(z) &= 1 - 0,2985z^{-1} \\ D(z) &= 0,07463 \end{aligned}$$

④ Börvärdesfaktorn K_r

$$K_r = \frac{P(1)}{B(1)} = \frac{1 - 1 + 0,25}{0,65 + 0,35} = 0,25$$

b) Ur blockschemat ser vi

$$e(k) = 0,25 \cdot r(k) - 0,07463 y(k) \quad (1)$$

$$\frac{U}{E} = \frac{1}{C} = \frac{1}{1 - 0,2985z^{-1}} \Rightarrow U(1 - 0,2985z^{-1}) = E$$

$$\text{dvs } u(k) = e(k) + 0,2985 u(k) \quad (2)$$

Regulatorn kan alltså implementeras mha de två differensekvationerna (1) + (2) i någon dator

19.6 $y(k) = 0,6 y(k-1) + 0,3 u(k-1) + 0,7 u(k-2)$

Omskrivning till ö-funktion ger:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,3 z^{-1} + 0,7 \cdot z^{-2}}{1 - 0,6 z^{-1}} \quad \begin{matrix} \leftarrow B\text{-polynom (grad 2)} \\ \leftarrow A\text{-polynom (grad 1)} \end{matrix}$$

Arbetsmetoden i läroboken ger nu:

① Gradtal

$$\begin{cases} n_p = 2+1-1=2 \\ n_c = 2-1=1 \\ n_0 = 1-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(z) = 1 + C_1 z^{-1} \\ D(z) = d_0 \end{cases}$$

TVÅ PARAMETRAR
ATT BESTÄMMA!
 C_1 OCH d_0

② Önskat kar. polynom (i negativ representation)

$$P(z) = (1 - 0,3 z^{-1})(1 - 0,3 z^{-1}) = 1 - 0,6 z^{-1} + 0,09 z^{-2}$$

③ Polplaceringsekvationen blir

$$AC + BD = (1 - 0,6 z^{-1})(1 + C_1 z^{-1}) + (0,3 z^{-1} + 0,7 z^{-2}) d_0 = 1 - 0,6 z^{-1} + 0,09 z^{-2}$$

Hopmultiplicering av vänsterledet + sammanföring av termer med samma gradtal ger:

$$1 + (C_1 - 0,6 + 0,3 d_0) z^{-1} + (0,7 d_0 - 0,6 C_1) z^{-2} = 1 - 0,6 z^{-1} + 0,09 z^{-2}$$

Vi får ekvationssystemet:

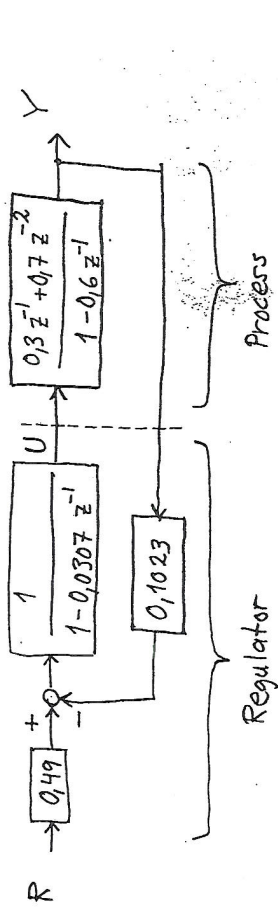
$$\begin{cases} C_1 - 0,6 + 0,3 d_0 = -0,6 \\ 0,7 d_0 - 0,6 C_1 = 0,09 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{LÖSNING AV} \\ \text{EKV. SYSTEMET} \end{matrix} \begin{cases} C_1 = -0,0307 \\ d_0 = 0,1023 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(z) = 1 - 0,0307 z^{-1} \\ D(z) = 0,1023 \end{cases}$$

④ Bärvärdesfaktorn blir:

$$K_r = \frac{P(1)}{B(1)} = \frac{1 - 0,6 + 0,09}{0,3 + 0,7} = \frac{0,49}{1} = 0,49$$

Utseende på reglerystemet:

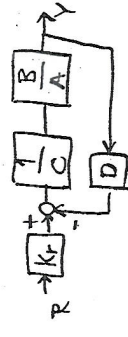


Total överföringsfunktion från R till Y

$$H_{tot} = \frac{K_r \cdot \frac{B}{C \cdot A}}{1 + \frac{BD}{C \cdot A}} = \frac{K_r \cdot B}{A \cdot C + B \cdot D} = \frac{K_r \cdot B}{P}$$

Insättning av K_r , B och P ger:

$$H_{tot} = \frac{0,49 (0,3 z^{-1} + 0,7 z^{-2})}{1 - 0,6 z^{-1} + 0,09 z^{-2}}$$



19.9 Ledtrådar för att komma igång

- Bestäm approximativ analog ö-funktion till processen:

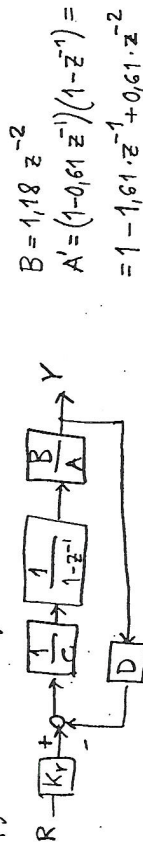
$$G(s) \approx \frac{3 \cdot e^{-s}}{1+2s}$$

- Diskretisera vid sampl. intervallet $h=1$ s.

$$e^{-s} \xrightarrow{z^{-1}} \frac{3}{1+2s} \leftrightarrow \frac{1,18 \cdot z^{-1}}{1-0,61 z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1,18 \cdot z^{-2}}{1-0,61 z^{-1}} \leftarrow \begin{matrix} \text{B-polynom} \\ \text{A-polynom} \end{matrix}$$

- Polplaceringsregulator med integralverkan krävs pga. kravet $e_v=0$.



$$\begin{cases} \eta_c = \eta_b - 1 = 2 - 1 = 1 \\ \eta_d = \eta_a - 1 = 2 - 1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 1 + c_1 z^{-1} \\ D = d_0 + d_1 z^{-1} \end{cases}$$

- Poler i ongo $\Rightarrow P(z) = (1-0,61 z^{-1})^3 = 1$

$$\eta_p = \eta_a + \eta_b - 1 = 3$$

- Polplaceringsregulationen blir

$$\begin{aligned} A'C + BD &= (1-1,61 z^{-1} + 0,61 z^{-2})(1+c_1 z^{-1}) + \\ &+ 1,18 z^{-1} (d_0 + d_1 z^{-1}) = 1 \end{aligned}$$

Fortsättningen av talet löser enligt arbetsmetodiken i faktaboken, på samma sätt som andra polplaceringsfall...

19.13

Total överföringsfunktion

$$G_{TOT} = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} = \frac{K \left(\frac{1+Ts}{Ts} \right) \cdot \frac{3}{1+2s}}{1 + \frac{K(1+Ts)}{Ts} \cdot \frac{3}{1+2s}} =$$

$$= \frac{3K(1+Ts)}{Ts(1+2s) + 3K(1+Ts)} = \frac{3K + 3KTs}{2Ts^2 + T(3K+1)s + 3K} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{Önskad kar. ekv: } \text{konst} \cdot (s+1)(s+1) &= \\ &= \text{konst} \cdot (s^2 + 2s + 1) \end{aligned}$$

För att få likhet väljer vi konstanten till $3K$ och får

$$3Ks^2 + 6Ks + 3K = 2Ts^2 + T(3K+1)s + 3K$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3K = 2T & (1) \\ 6K = T(3K+1) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow T = 1,5K$$

$$(2) \Rightarrow 6K = 1,5K(3K+1) \Rightarrow 4,5K^2 - 6K + 1,5K = 0$$

$$\Rightarrow K(4,5K - 4,5) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} K=1 \\ T=1,5 \end{matrix}$$

$$\text{Svar: } \text{Välj } \begin{cases} T=1,5 \\ K=1 \end{cases}$$