

Kurs SS 4020, 28 Oct 2016, Solutions.

1) Laplace Transf.

$$(a) \quad x(t) = 5e^{-2t} (t + e^{3t}) \quad , \quad t \geq 0$$

$$x(t) = 5e^{-2t} \cdot t + 5e^t = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\mathcal{LT}\{x(t)\} =: X(s) \quad \text{where}$$

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) \quad \& \quad X_1(s) = \mathcal{LT}\{x_1(t)\}$$

$$X_2(s) = \mathcal{LT}\{x_2(t)\}$$

$$X_1(s) = 5 \cdot \frac{1}{(s+2)^2} \quad , \quad X_2(s) = 5 \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) = \frac{5}{(s+2)^2} + \frac{5}{(s+1)}$$

(b) Z-transf.

$$x[n] = \frac{0,4^n + 0,2^n}{0,8^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$X(z) = \frac{z}{z-0,5} + \frac{z}{z-0,25}$$

(C) Impulsvar $\hat{o} = \psi(s)$ where $H(s) = \psi(s)$

$$\psi(s) = H(s) = \frac{5s^2 + 8s + 30}{s^3 + 2s^2 + 10s} = \frac{5s^2 + 8s + 30}{s(s^2 + 2s + 10)}$$

Poles $s=0$ $s^2 + 2s + 10 = 0 \Rightarrow s = -1 \pm j3 \Rightarrow$

$$f(t) = A \cdot e^{0t} + B \cdot e^{-t} \cdot \cos(3t + \beta)$$

$$N'(s) = 1 \cdot (s^2 + 2s + 10) + s(2s + 2)$$

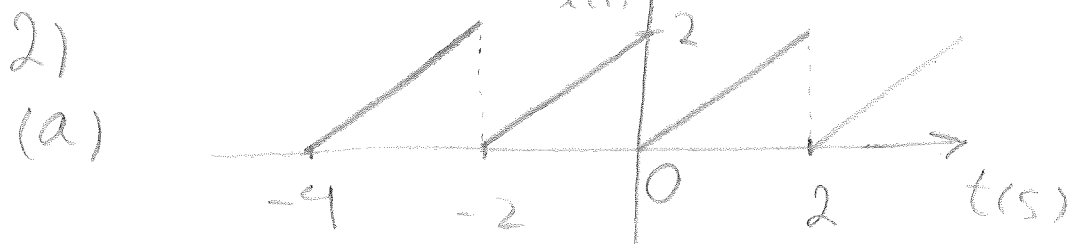
$$A = \left[\frac{5s^2 + 8s + 30}{1 \cdot (s^2 + 2s + 10) + s(2s + 2)} \right]_{s=0} = \frac{30}{10} = 3$$

$$B e^{j\beta} = 2 \cdot \left[\frac{5s^2 + 8s + 30}{1 \cdot (s^2 + 2s + 10) + s(2s + 2)} \right]_{s=-1+j3} = 2 \cdot \frac{5(-1+j3)^2 + 8(-1+j3) + 30}{1 \cdot 0 + (-1+j3)(-2+j6+2)} =$$

$$= 2 \cdot \frac{5(1-j6-9) - 8 + j24 + 30}{(-1+j3) \cdot j6} = 2 \cdot \frac{5-j30-45-8+j24+30}{(-1+j3) \cdot j6} =$$

$$= \frac{-18-j6}{(-1+j3)j3} = \frac{6+j2}{(-1+j3)j} = - \frac{2-j6}{-1+j3} = \frac{-2+j6}{-1+j3} = 2 = 2e^{j0^\circ}$$

$$B = 2, \beta = 0^\circ \Rightarrow y(t) = 3 + 2e^{-t} \cos(3t) \neq$$



$$T = 2 \text{ s}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right), \quad \omega_0 T = 2\pi$$

$$f(t) = at + b \rightarrow 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0, \quad f(t) = at$$

$$a = \frac{2-0}{2-0} = 1 \rightarrow f(t) = t$$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{1 \text{ period}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T t dt = \frac{1}{T} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{1}{T} \frac{T^2}{2} = 1$$

So $C_0 = 1$

$$C_K = \frac{1}{T} \int_{1 \text{ period}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T t e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt = 0$$

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^{-jk\omega_0 t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \end{cases} \Rightarrow \left[uv - \int v du \right]_a^b = \left[t \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} - \int \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} dt \right]_0^T$$

$$C_K = \frac{1}{T} \left(\left[t \frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \right]_0^T - \int_0^T 1 \cdot \frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} dt \right)$$

$$= \frac{1}{T} \left(T \frac{e^{-jk\omega_0 T}}{-jk\omega_0} - 0 - \left[\frac{1}{(-jk\omega_0)^2} e^{-jk\omega_0 t} \right]_0^T \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 \frac{e^{-jk2\pi}}{-jk\pi} - \left[\frac{1}{k^2\omega_0^2} e^{-jk2\pi} - \frac{1}{k^2\omega_0^2} \right]_0^T \right) = \frac{1}{-jk\pi} = \frac{j}{k\pi}$$

For $k \neq 0$

$$\text{Re}\{x(t)\} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$a_0 = C_0 = 1, \quad a_k = 2 \text{Re} C_k = 0, \quad b_k = -2 \text{Im} C_k = \frac{-2}{k\pi}$$

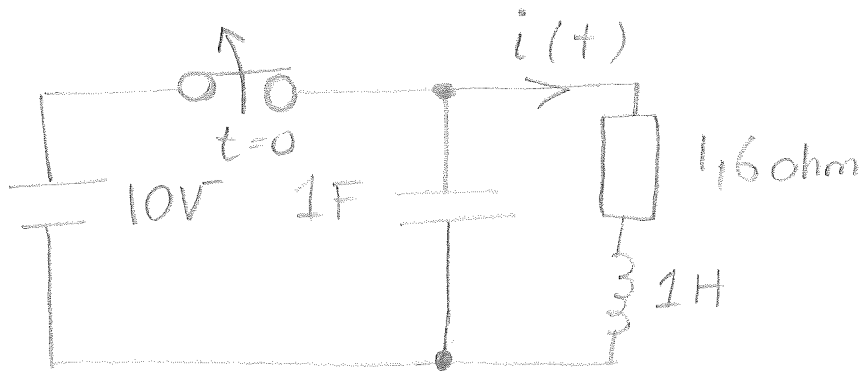
$$x(t) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi t)$$

So

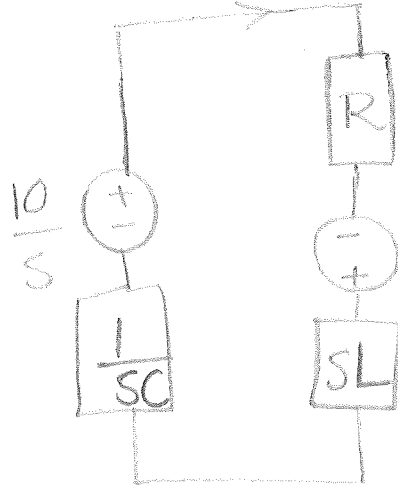
(2)b

$x(-t) = x(t)$ så funktionen är jämn.

(3)



for $t=0$ $I = \frac{10V}{1.6\Omega} = 6.25 A$



$6.25 \rightarrow i(0) \cdot L = 6.25 \cdot 1 = 6.25 V$
 $\begin{cases} L = 1 H \\ C = 1 F \end{cases}$

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z_{tot}(s)} = \frac{\frac{10}{s} + 6.25}{\frac{1}{s} + 1.6 + s} = \frac{10 + 6.25s}{s^2 + 1.6s + 1} = \frac{T(s)}{N(s)}$$

$$N'(s) = 2s + 1$$

poles: $s^2 + 1.6s + 1 = 0 \Rightarrow s = -0.8 \pm j0.6$

$$i(t) = A e^{-0.8t} \cos(0.6t + \phi) \text{ where } A e^{j\phi} = 2 \left[\frac{T(s)}{N'(s)} \right]_{s = -0.8 + j0.6}$$

$$= \frac{10 + 6.25(-0.8 + j0.6)}{-1.6 + j1.2 + 1.6} = 2 \frac{5 + j3.75}{-1.6 + j1.2 + 1.6}$$

$$= 2 \frac{6.25 e^{j36.9^\circ}}{1.2 e^{j90^\circ}} = 10.4 e^{-j53.1^\circ} \Rightarrow i(t) = 10.4 e^{-0.8t} \cos(0.6t - 53.1^\circ) \quad (A)$$

(4)

$$a) x(t) = 4e^{-600t} \sin(4500\pi t)$$

$$T_s = \frac{1}{10K} = 10^{-4} \text{ (s)}, \quad t = 10^{-4} n$$

$$x[n] = 4 \cdot e^{-600 \cdot 10^{-4} n} \sin(4500\pi \cdot 10^{-4} n)$$

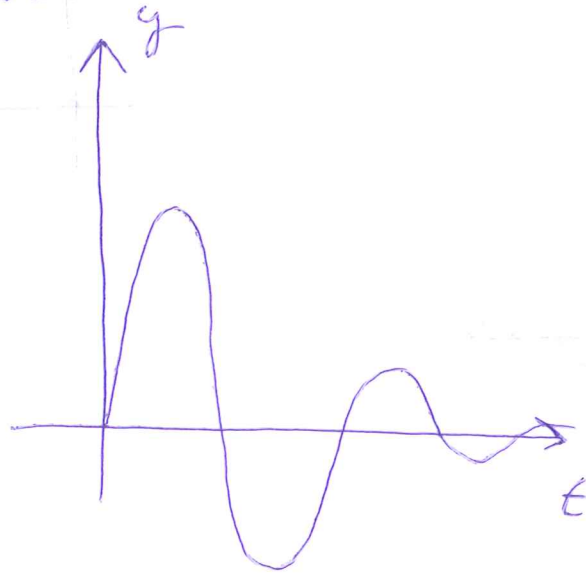
$$x[n] = 4 \cdot e^{-0.6 \cdot 10^{-2} n} \sin(45\pi \cdot 10^{-2} n)$$

$$x[n] = 4 \cdot (0,9418)^n \sin(1,413717 n) \left. \begin{array}{l} A=4 \\ b=0,9418 \\ \Omega=1,4137 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$x[n] = A \cdot b^n \sin[n \cdot \Omega]$$

b)

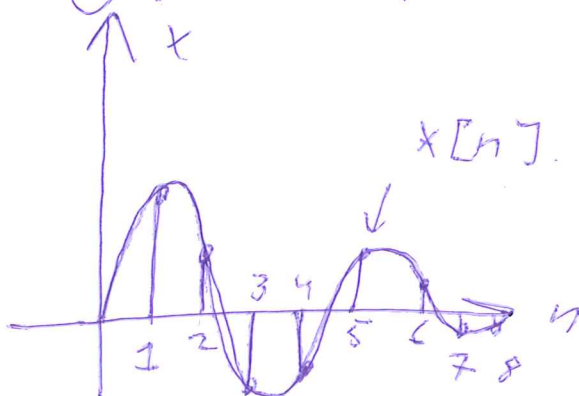
4.5) Signalen är en exponentiellt dämpad sinus:



$$\text{Frekvensen är } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4500\pi}{2\pi} = 2250 \text{ Hz.}$$

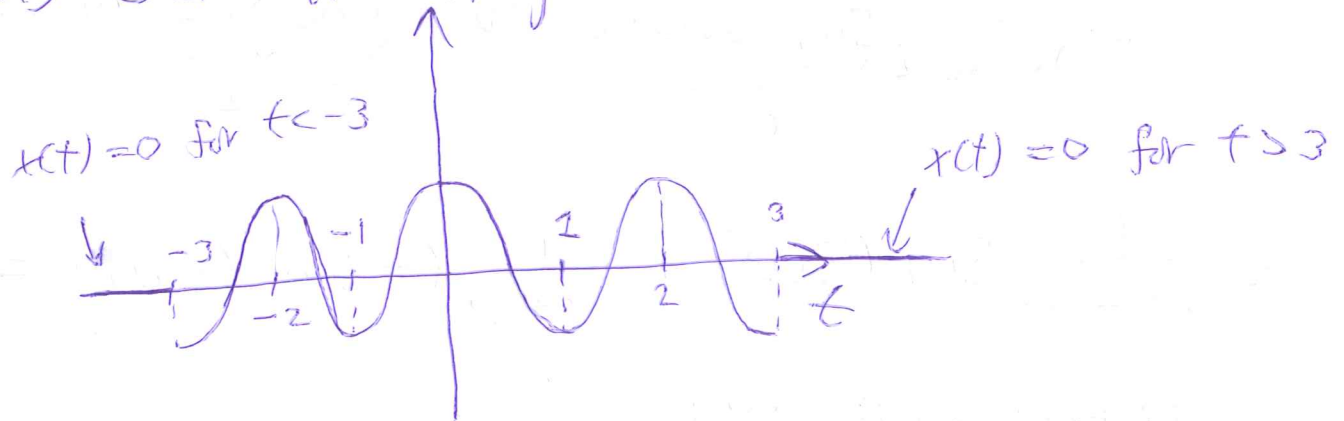
$f_s = 10 \text{ kHz}$, så vi får ungefär 4
sample per period (lite mer)

Den diskreta signalen ser alltså
ut ungefär enligt bilden



5. $x(t) = \cos(\pi t) [u(t+3) - u(t-3)]$

$x(t)$ ser ut enligt nedan



FT ges av

$$\underline{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t [u(t+3) - u(t-3)] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-3}^3 \cos(\pi t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-3}^3 e^{-j\omega t} \frac{1}{2} [e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 e^{j t(\pi - \omega)} dt + \frac{1}{2} \int_{-3}^3 e^{-j t(\pi + \omega)} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{j(\pi - \omega)} \left[e^{j t(\pi - \omega)} \right]_{-3}^3 + \frac{1}{2} \frac{1}{-j(\pi + \omega)} \left[e^{-j t(\pi + \omega)} \right]_{-3}^3$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2j} \sin(3(\pi - \omega))}_{= 2j \sin(3(\pi - \omega))} + \underbrace{\frac{1}{2j} \sin(3(\pi + \omega))}_{= -2j \sin(3\omega)}$$

$$= \frac{1}{\pi - \omega} \sin[3(\pi - \omega)] + \frac{1}{\pi + \omega} \sin[3(\pi + \omega)] =$$

$$= \frac{1}{\pi - \omega} \left[\underbrace{\sin 3\pi}_{=0} \cos 3\omega - \sin 3\omega \underbrace{\cos 3\pi}_{=-1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi + \omega} \left[\underbrace{\sin 3\pi}_{=0} \cos 3\omega + \underbrace{\cos 3\pi}_{=-1} \sin 3\omega \right]$$

$$= \frac{1}{\pi - \omega} \sin(3\omega) + \frac{1}{\pi + \omega} (-\sin(3\omega)) =$$

$$= \frac{\pi + \omega - (\pi - \omega)}{\pi^2 - \omega^2} \sin 3\omega =$$

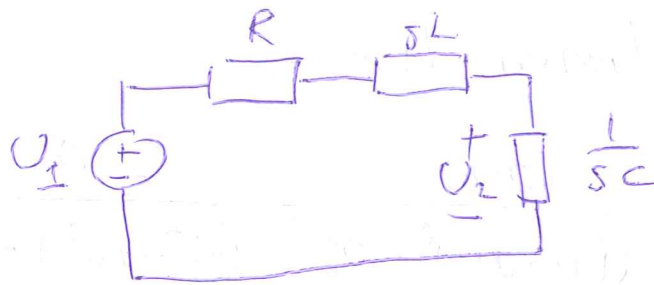
$$= \frac{2\omega}{\pi^2 - \omega^2} \sin(3\omega).$$

Så FT:n blir

$$X(\omega) = \frac{2\omega}{\pi^2 - \omega^2} \sin(3\omega).$$

Notera att Fouriertransformen är jämn och rent reell, vilket alltid gäller för Fouriertransformen av en reell, jämn funktion (som t.ex. $x(t)$).

6. a)



Spänningsdelning ger

$$U_2 = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2 CL + sRC + 1} U_1(s) = H(s)$$

Överföringsfunktionen är

$$H(s) = \frac{1}{s^2 CL + sRC + 1} = \frac{1}{CL} \frac{1}{s^2 + \frac{RC}{CL} s + \frac{1}{CL}}$$

$$= 2 \cdot 10^6 \frac{1}{s^2 + 2000s + 2 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^6 \frac{1}{(s+1000)^2 + 10^6}$$

$$= 2 \cdot 10^6 \frac{1}{(s+1000)^2 + (10^3)^2} = 2 \cdot 10^3 \frac{1000}{(s+1000)^2 + 1000^2}$$

Detta är en exponentiellt dämpad sinus!

$$h(t) = 2000 e^{-1000t} \sin(1000t)$$

↑
impulssvaret.

b) Frekvensfunktionen blir

$$H(j\omega) = 2000 \frac{1000}{(j\omega + 1000)^2 + 10^6} = \frac{2 \cdot 10^6}{(10^6 - \omega^2) + 2000j\omega + 10^6}$$

$$= \frac{2 \cdot 10^6}{(2 \cdot 10^6 - \omega^2) + 2000j\omega}$$

Amplitudfunktionen blir

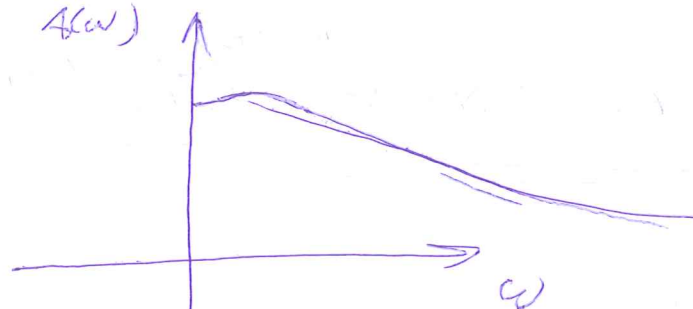
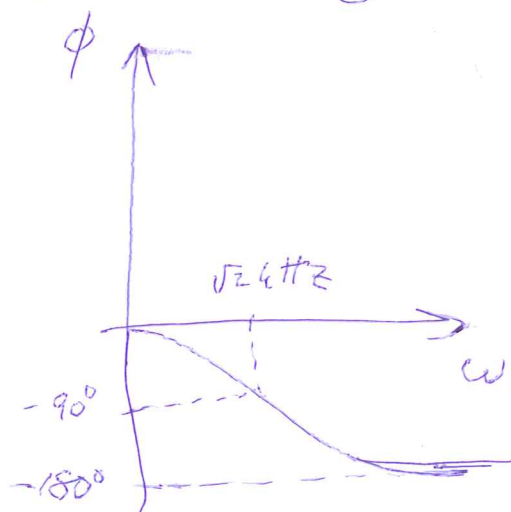
$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{2 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^6 \omega^2 + (2 \cdot 10^6 - \omega^2)^2}$$

Fasfunktionen blir

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2000\omega}{2 \cdot 10^6 - \omega^2}\right) & \text{för } \omega < 1000\sqrt{2} \\ \left[-\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega^2 - 2 \cdot 10^6}{2000\omega}\right)\right] & \text{för } \omega > 1000\sqrt{2} \end{cases}$$

Notera att $\phi(0) = 0$, $\phi(\omega) < 0 \forall \omega$, och $\phi(\omega) \rightarrow -\pi$ då $\omega \rightarrow \infty$.

Så bode-diagrammen bör se ut enligt



↑ kan ses ur
pd-vollstäcks diagram

c) Innan vi satt in värden fick vi

$$H(s) = \frac{1}{CL} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}}$$

C och L har samma värden som innan, så

$$H(s) = 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{s^2 + 20R + 2 \cdot 10^6}$$

Impulssvaret har oscillatoriskt inslag o.m.m.
Överföringsfunktionen har komplexa poler,
dvs om

~~##~~ $s^2 + 20R + 2 \cdot 10^6 = 0$ har komplexa
nollställen.

Rötterna är

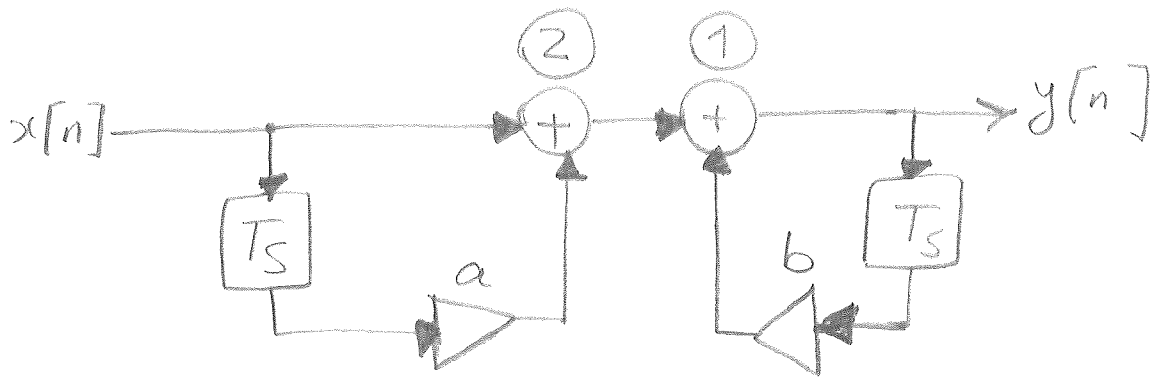
$$s = -10R \pm \sqrt{100R^2 - 2 \cdot 10^6}$$

Villkoret att nollställena är reella är:

$$100R^2 - 2 \cdot 10^6 > 0 \Rightarrow R^2 > 2 \cdot 10^4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R > 100\sqrt{2} \, \Omega}}$$

7)a)



$$y[n] = \textcircled{+}_1 + \textcircled{+}_2$$

$$\textcircled{+}_1 = by[n-1] ; \textcircled{+}_2 = ax[n-1] + x[n]$$

$$y[n] = ax[n-1] + x[n] + by[n-1]$$

$$Y(z) = a z^{-1} X(z) + X(z) + b z^{-1} Y(z)$$

$$(1 - b z^{-1}) Y(z) = (1 + a z^{-1}) X(z) \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1 + a z^{-1})}{(1 - b z^{-1})} = \frac{z + a}{z - b}$$

(b)

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

$$Y(z) = \frac{z + 0,2}{z - 1,6} \cdot \frac{z}{z - 0,6} = \frac{(z + 0,2)}{(z - 1,6)(z - 0,6)} \cdot z = \frac{T(z)}{N(z)} \cdot z$$

Poles: $z = 1,6$, $z = 0,6$ (Enkel & Reel) $\Rightarrow y[n]$ av formen $\{K C^n\}$

$$y[n] = K_1 C_1^n + K_2 C_2^n \text{ where } K_1 = \left[\frac{T(z)}{N'(z)} \right]_{z=C_1} = \frac{1,8}{1} = 1,8$$

$$K_2 = \left[\frac{T(z)}{N'(z)} \right]_{z=C_2} = \frac{0,8}{-1} = -0,8$$

$$y[n] = 1,8 \cdot (1,6)^n + -0,8 (0,6)^n \quad \#$$

$$8) \Omega = 2\pi \cdot \frac{f}{f_s} = 2\pi \frac{60}{2 \cdot 10^3} = 0,06 \pi \text{ rad}$$

$$\Omega = 10,8^\circ$$

$$\begin{cases} z_{\text{null}} = e^{\pm j10,8^\circ} \\ z_{\text{pol}} = 0,8 e^{\pm j10,8^\circ} \end{cases}$$

Transfer funktions i s:

$$H(z) = K \frac{(z - z_{\text{null}}^1)(z - z_{\text{null}}^2)}{(z - z_{\text{pol}}^1)(z - z_{\text{pol}}^2)}$$

K väljs så att $H(1) = 1$

$$H(1) = K \cdot \frac{(1 - \cos 10,8^\circ - j \sin 10,8^\circ)(1 - \cos 10,8^\circ + j \sin 10,8^\circ)}{(1 - 0,8 \cos 10,8^\circ - j 0,8 \sin 10,8^\circ)(1 - 0,8 \cos 10,8^\circ + j 0,8 \sin 10,8^\circ)}$$

$$= K \frac{(1 - \cos 10,8^\circ)^2 + \sin^2 10,8^\circ}{(1 - 0,8 \cos 10,8^\circ)^2 + 0,8^2 \sin^2 10,8^\circ} = K \cdot 0,5184$$

$$H(1) = 1 = K \cdot 0,5184 \Rightarrow K = 1,9291$$

9. $A \leftrightarrow 4$

eftersom pol/nollställe diagrammet är det för ett notch filter. Ett notchfilter filterar bort en frekvens, vilket nr. 4 gör.

$B \leftrightarrow 3$

eftersom punkten på enhetscirkeln närmast polen är $\Omega = 0$, dvs vi har ett max där. När Ω ökar avlägsnar vi oss från polen, så $|H(\Omega)|$ minskar.

$C \leftrightarrow 2$

Vid $\Omega = 0$ är vi relativt långt bort från polerna, så $|H(\Omega)|$ bör vara förhållandevis låg. När Ω ökar närmar vi oss en pol och $|H(\Omega)|$ bör därför öka. I närheten av $\Omega \approx \frac{3\Omega}{4}$ passerar vi polen, $|H(\Omega)|$ har då ett max, varefter $|H(\Omega)|$ avtar.

$D \leftrightarrow 1$

Är ungefär samma anledning som ovan ($C \leftrightarrow 2$). Här passerar vi dock polen vid $\Omega = \Omega/2$, så förat max bör vara vid mitten av diagrammet för $|H(\Omega)|$.