

Komplexa tal 2015

Komplexa tal är en konstruktion av två reella tal och en symbol j av typen $z = a + jb$, som lyder de vanliga räknelagarna, tex den distributiva lagen, den associativa lagen osv. med det viktiga tillägget att

För övrigt kan jb uppfattas som "j gånger b ".

$$j^2 = -1$$

Exempel

Bestäm $z_1 z_2$ om $z_1 = 2 + j5$ och $z_2 = 4 - j6$.

Lösning

$$z_1 z_2 = (2 + j5)(4 - j6) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot j \cdot 6 + j \cdot 5 \cdot 4 - j^2 \cdot 5 \cdot 6 = 8 - j12 + j20 - (-1) \cdot 30 = \underline{\underline{38 + j8}}$$

I uttrycket $z = a + jb$ kallas a det komplexa talets **realdel** och b det komplexa talets talets **imaginärdel**. Detta skrives $\text{Re}z = a$ resp. $\text{Im}z = b$.

Observera att realdelen och imaginärdelen är rella tal!

Om $z = a + jb$ kallas talet $z = a - jb$ **komplexkonjugatet** till z och betecknas $\bar{z}$.

Exempel

Bestäm $\frac{z_2}{z_1}$ med z_1 och z_2 enligt föregående exempel.

Lösning

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{4 - j6}{2 + j5} = (\text{förläng med komplexkonjugatet}) = \frac{(2 - j5)(4 - j6)}{(2 - j5)(2 + j5)} = \frac{8 - j12 - j20 + j^2 \cdot 30}{2^2 - (j5)^2} = \frac{-22 - j32}{4 - (-25)} = \\ &= \frac{-22 - j32}{29} = -\frac{22}{29} - j\frac{32}{29} \end{aligned}$$

Här såg vi i nämnaren exempel på att $z \cdot \bar{z}$ är ett reellt tal. Detta gäller allmänt ty

$$z = a + jb \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 - (jb)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$$

Eulers formel

Om vi använder Taylorutvecklingen av funktionen $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ kan vi definiera denna funktion med

komplext argument enligt

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!} = 1 + j\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + j\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right). \end{aligned}$$

Men här kan vi identifiera realdelen som Taylorutvecklingen för $\cos x$ och imaginärdelen som Taylorutvecklingen för $\sin x$.

Därför är det rimligt att göra följande definition:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Detta samband kallas **Eulers formel**.

Exempel

Uttryck funktionerna $\sin x$ och $\cos x$ med hjälp av exponentialfunktioner.

Lösning

Eulers formel ger $\begin{cases} e^{jx} = \cos x + j\sin x \\ e^{-jx} = \cos x - j\sin x \end{cases}$, så att $\begin{cases} e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x \\ e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x \end{cases}$.

Detta ger att $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \\ \sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) \end{cases}$ **Viktiga samband!!**

Om vi utvidgar lagarna för exponentialfunktioner till att gälla även för komplexa variabler får vi

$$\cos nx + j\sin nx = e^{jnx} = (\cos x + j\sin x)^n, \text{ dvs}$$

$$(\cos x + j\sin x)^n = \cos nx + j\sin nx$$

Detta samband kallas **de Moivres formel**.

Det komplexa talplanet

Eftersom komplexa tal har två "komponenter" kan varje punkt i det reella talplanet identifieras med ett komplext tal, varvid vi får det **komplexa talplanet**.

x- och y-axlarna övergår då till att vara **realaxel** resp. **imaginäraxel**, se fig.

Punkten (x, y) i planet identifieras alltså med det **komplexa talet** $z = x + jy$ i talplanet.

Detta sätt att ange det komplexa talet kallas **rektangulär form**.

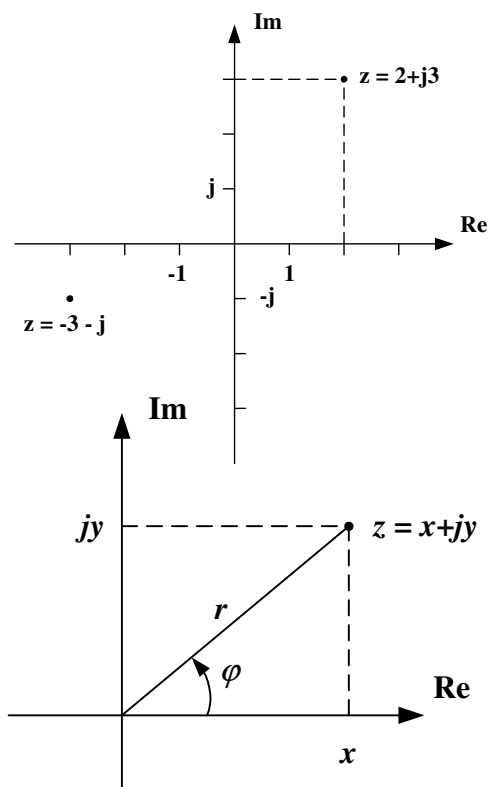
Denna geometriska tolkning ger dessutom ett nytt sätt att representera komplexa tal, nämligen **polär form**.

Eftersom $x = r \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi$ kan det komplexa talet z skrivas som $z = r \cos \varphi + jr \sin \varphi = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$, vilket med Eulers formel blir

$$z = re^{j\varphi}$$

Här är $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ det komplexa talets **absolutbelopp**

och φ **dess argument** för vilket gäller $\tan \varphi = \frac{y}{x}$.



Detta gör att följande gäller för argumentet φ

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x > 0 \quad y > 0 \quad 1 : \text{a kvadranten} \\ 180^\circ - \arctan \left| \frac{y}{x} \right| & x < 0 \quad y > 0 \quad 2 : \text{a kvadranten} \\ \arctan \left| \frac{y}{x} \right| - 180^\circ & x < 0 \quad y < 0 \quad 3 : \text{e kvadranten} \\ -\arctan \left| \frac{y}{x} \right| & x > 0 \quad y < 0 \quad 4 : \text{e kvadranten} \end{cases}$$

eller om man så vill

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x > 0 \\ 180^\circ - \arctan \left| \frac{y}{x} \right| & x < 0 \quad y > 0 \quad 2 : \text{a kvadranten} \\ \arctan \left| \frac{y}{x} \right| - 180^\circ & x < 0 \quad y < 0 \quad 3 : \text{e kvadranten} \end{cases}$$

Exempel

Skriv $z = 6 \cdot e^{j140^\circ}$ på rektangulär form.

Lösning

Eulers formel ger $z = 6 \cdot \cos 140^\circ + j6 \cdot \sin 140^\circ = \underline{\underline{-4,60 + j3,86}}$

Exempel

Skriv $z = -3 + j4$ på polär form.

Lösning

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad 2 : \text{a kvadranten} \Rightarrow \varphi = 180^\circ - \arctan \left| \frac{4}{-3} \right| \Rightarrow \varphi = 126,9^\circ, \text{ så att } \underline{\underline{z = 5 \cdot e^{j126,9^\circ}}}$$

Exempel

Skriv $z = -12 - j5$ på polär form.

Lösning

$$r = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13, \quad 3 : \text{e kvadranten} \Rightarrow \varphi = -180^\circ + \arctan \left| \frac{-5}{-12} \right| \Rightarrow \varphi = -157,4^\circ, \text{ så att } \underline{\underline{z = 13 \cdot e^{-j157,4^\circ}}}$$

Komplexa tal multipliceras eller divideras lättast om de är skrivna på polär form.

Exempel

Låt $z_1 = 3 + j4$ och $z_2 = 2 - j2$. Bestäm $z_1 \cdot z_2$ och $\frac{z_1}{z_2}$.

Lösning

Skriv om på polär form.

$$z_1 = 5 \cdot e^{j53,1^\circ} \quad z_1 = 2\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} = 2,83 \cdot e^{-j45^\circ}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot e^{j53,1^\circ} \cdot 2\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} = 5 \cdot 2\sqrt{2} \cdot e^{j53,13^\circ} \cdot e^{-j45^\circ} = 14,1 \cdot e^{j(53,13^\circ - 45^\circ)} = \underline{\underline{14,1 \cdot e^{j8,13^\circ}}} = \underline{\underline{14 + j2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 \cdot e^{j53,13^\circ}}{2\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \cdot e^{j98,13^\circ} = \underline{\underline{1,77 \cdot e^{j98,13^\circ}}} = \underline{\underline{-0,25 + j1,75}}$$

Omskrivningar med Eulers formel

Ibland kan det vara lämpligt att skriva om uttryck med Eulers formel.

Exempel

Skriv $x(t) = 2 \sin t + 4 \cos 2t$ som en summa av exponentialfunktioner.

Lösning

Enlig Eulers formel kan vi skriva

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \sin t + 4 \cos 2t = \frac{2}{2j} (e^{jt} - e^{-jt}) + \frac{4}{2} (e^{j2t} + e^{-j2t}) = -je^{jt} + je^{-jt} + 2e^{j2t} + 2e^{-j2t} = -e^{j90^\circ} \cdot e^{jt} + e^{j90^\circ} \cdot e^{-jt} + 2e^{j2t} + 2e^{-j2t} = \\ &= \underline{\underline{-e^{j(t+90^\circ)} + e^{-j(t-90^\circ)} + 2e^{j2t} + 2e^{-j2t}}} \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \sin t + 4 \cos 2t = \frac{2}{2j} (e^{jt} - e^{-jt}) + \frac{4}{2} (e^{j2t} + e^{-j2t}) = -je^{jt} + je^{-jt} + 2e^{j2t} + 2e^{-j2t} = e^{-j90^\circ} \cdot e^{jt} + e^{j90^\circ} \cdot e^{-jt} + 2e^{j2t} + 2e^{-j2t} = \\ &= \underline{\underline{e^{j(t-90^\circ)} + e^{-j(t-90^\circ)} + 2e^{j2t} + 2e^{-j2t}}} \end{aligned}$$

Exempel

Skriv $e^{jk\pi} + 1$ som en produkt.

Lösning

$$\begin{aligned} e^{jk\pi} + 1 &= \left[\begin{array}{l} \text{Skriv om varje term} \\ \text{som lämplig produkt} \end{array} \right] = e^{jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk\frac{\pi}{2}} + e^{jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \left[\text{Bryt ut } e^{jk\frac{\pi}{2}} \right] = e^{jk\frac{\pi}{2}} \cdot \left(e^{jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Eulers} \\ \text{formel} \end{array} \right] = e^{jk\frac{\pi}{2}} \cdot 2 \cdot \cos k\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{2e^{jk\frac{\pi}{2}} \cos k\frac{\pi}{2}}} \end{aligned}$$

Exempel

Skriv $e^{jk0,8\pi} - e^{+jk0,4\pi}$ som en produkt.

Lösning

$$\begin{aligned} e^{jk0,8\pi} + e^{+jk0,4\pi} &= \left[\begin{array}{l} \text{Medelvärdet} \\ \text{av } 0,8 \text{ och } 0,4 \text{ är } 0,6 \\ \text{Bryt därför ut } e^{jk0,6\pi} \end{array} \right] = e^{jk0,6\pi} \cdot (e^{jk0,2\pi} - e^{-jk0,2\pi}) = \left[\begin{array}{l} \text{Eulers} \\ \text{formel} \end{array} \right] = e^{jk0,6\pi} \cdot 2j \sin k0,2\pi = \\ &= \underline{\underline{2j \cdot e^{jk0,6\pi} \sin k0,2\pi}}. \end{aligned}$$

Här kan vi dock skriva j på polär form, så att

$$2j \cdot e^{jk0,6\pi} \sin k0,2\pi = 2e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk0,6\pi} \sin k0,2\pi = 2e^{jk\left(\frac{\pi}{2}+0,6\pi\right)} \sin k0,2\pi = \underline{\underline{2e^{jk1,1\pi} \cdot \sin k0,2\pi}}$$

Exempel

Skriv $e^{jk0,8\pi} + e^{-jk1,2\pi}$ som en produkt.

Lösning

$$\begin{aligned} e^{jk0,8\pi} + e^{-jk1,2\pi} &= \left[\begin{array}{l} \text{Observera att} \\ -1,2 = -2 + 0,8! \end{array} \right] = e^{jk0,8\pi} + e^{-jk2\pi + jk0,8\pi} = e^{jk0,8\pi} + e^{-jk2\pi} \cdot e^{jk0,8\pi} = e^{jk0,8\pi} (1 + e^{-jk2\pi}) = \\ &= e^{jk0,8\pi} (1 + 1) = \underline{\underline{2e^{jk0,8\pi}}} \end{aligned}$$

Något om komplexvärda funktioner

Vi kommer i fortsättningen att stöta på komplexvärda funktioner av typen $x(t) = Ae^{jk\omega t}$, där A , k och ω är konstanter. Vid derivering och integrering av dessa med avseende på tidvariabeln t kan vi betrakta även den imaginära enheten j som en konstant.

Alltså

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot jk\omega \cdot e^{jk\omega t}$$

och

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} Ae^{jk\omega t} dt = \left[A \cdot \frac{1}{jk\omega} \cdot e^{jk\omega t} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{A}{jk\omega} \cdot \left[e^{jk\omega t} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{A}{jk\omega} \cdot (e^{jk\omega t_2} - e^{jk\omega t_1})$$

Exempel

Bestäm $\frac{dx}{dt} = A \cdot jk\omega \cdot e^{jk\omega t}$ då $x(t) = 25 \cdot e^{j200t}$

Lösning

$$\frac{dx}{dt} = 25 \cdot j200 \cdot e^{j200t} = \underline{\underline{j5000 \cdot e^{j200t}}} = \underline{\underline{e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot 5000 \cdot e^{j200t}}} = \underline{\underline{5000 \cdot e^{j\left(200t + \frac{\pi}{2}\right)}}}$$

Exempel

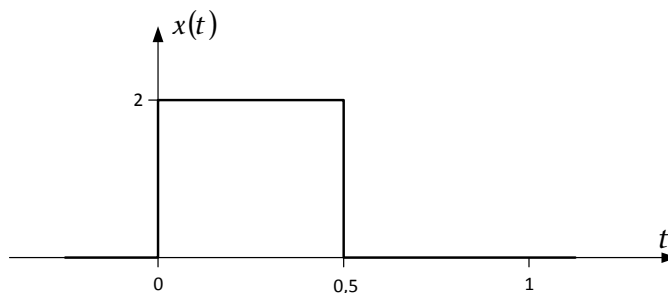
Bestäm $\int_{0,01}^{0,03} x(t) dt$ då $x(t) = 10 \cdot e^{j100\pi t}$

Lösning

$$\begin{aligned} \int_{0,01}^{0,025} x(t) dt &= \int_{0,01}^{0,025} 10e^{j100\pi t} dt = \left[10 \cdot \frac{1}{j100\pi} \cdot e^{j100\pi t} \right]_{0,01}^{0,025} = 10 \cdot \frac{1}{j100\pi} \cdot \left[e^{j100\pi t} \right]_{0,01}^{0,025} = \frac{1}{j10\pi} \cdot (e^{j2,5\pi} - e^{j\pi}) = \\ &= \frac{1}{j10\pi} \cdot \left(e^{j\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)} - e^{j\pi} \right) = \frac{1}{j10\pi} \cdot \left(e^{j2\pi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} - (-1) \right) = \frac{1}{j10\pi} \cdot (1 \cdot j + 1) = \underline{\underline{\frac{1+j}{j10\pi}}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}{e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot 10\pi}}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}}{10\pi}}} \end{aligned}$$

Exempel

Bestäm $\int_0^1 x(t) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}t} dt$ för $x(t)$ enligt figuren nedan.



Lösning

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2 & 0 \leq t \leq 0,5 \\ 0 & t \geq 0,5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(t) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}t} dt &= \int_0^{0,5} 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}t} dt + \int_{0,5}^1 0 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}t} dt = \int_0^{0,5} 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}t} dt = \left[2 \cdot \frac{1}{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}t} \right]_0^{0,5} = \left[\frac{4}{j\pi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}t} \right]_0^{0,5} = \\ &= \frac{4}{j\pi} \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{2} \cdot 0,5} - e^{j\frac{\pi}{2} \cdot 0} \right) = \underline{\underline{\frac{4}{j\pi} \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{4}} - 1 \right)}} \end{aligned}$$

Övningar

I uppgifterna nedan är vinkelenheten radianer om inget annat anges.
 k är en heltalsvariabel.

Låt $z_1 = 2 + j3$ och $z_2 = -3 + j4$ i uppgifterna 1 – 3.

- Bestäm $\bar{z}_1$ och $\bar{z}_2$.
- Bestäm z_1 och z_2 polär form.
- Bestäm a. $z_1 + z_2$ b. $\bar{z}_1 - z_2$ c. $z_1 + \bar{z}_2$ d. $z_1 \cdot z_2$ (polär form)
e. $\frac{z_1}{z_2}$ (rektangulär form).

- Bestäm k så att $z = \frac{5 + jk}{-4 + j7}$ blir ett reellt tal.

Låt $z_1 = 4e^{j30^\circ}$ och $z_2 = 6e^{-j45^\circ}$ i uppgifterna 5 – 7.

- Bestäm $\bar{z}_1$ och $\bar{z}_2$.
- Bestäm z_1 och z_2 rektangulär form.
- Bestäm $z_1 \cdot z_2$ och $z_1 + z_2$.
- Skriv, med hjälp av Eulers formel, $x(t) = 2 \sin 10t + 5 \cos 30t$ som en summa av exponentialfunktioner.
- Skriv, med hjälp av Eulers formel, $x(t) = 3 \sin \omega t - 5 \cos 2\omega t + 4 \sin 4\omega t$ som en summa av exponentialfunktioner.
- Skriv $x(t) = \frac{j}{(-8 + j6)} \cdot e^{j100t}$ på polär form.
- Skriv om $x(t) = (3 + j4) \cdot e^{j100t} + (3 - j4) \cdot e^{-j100t}$ som en reell trigonometrisk funktion.
- Bestäm $e^{j\pi}$, $e^{-j\frac{\pi}{3}}$, $e^{j\frac{\pi}{2}}$, $e^{j\frac{3\pi}{2}}$, $e^{j\frac{k\pi}{2}}$ ($k = \text{heltal}$)
- Bestäm $je^{-j\frac{\pi}{6}}$, $(j+1)e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ på polär form.

- Visa att
$$e^{jk\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 1 & k = 0, 4, 8, \dots \\ j & k = 1, 5, 9, \dots \\ -1 & k = 2, 6, 10, \dots \\ -j & k = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

- Visa att $1 + e^{jk\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot e^{jk\frac{\pi}{4}} \cdot \cos k\frac{\pi}{4}$

- Visa att $1 - e^{jk\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot e^{j(k+2)\frac{\pi}{4}} \cdot \sin k\frac{\pi}{4}$

- Skriv $\frac{j}{1 - jk\pi} e^{jk\frac{\pi}{4}t}$ på rektangulär form.

- Bestäm $\int_{-0,01}^{0,01} x(t) dt$ då $x(t) = 2 \cdot e^{j50\pi t}$

Svar

$$1. \quad \bar{z}_1 = 2 - j3 \quad \bar{z}_2 = -3 - j4$$

$$2. \quad 2 + j3 = \sqrt{13}e^{j56,3^\circ} \quad -3 + j4 = 5e^{j126,9^\circ}$$

$$3. \quad \text{a. } -1 - j7 \quad \text{b. } 5 + j7 \quad \text{c. } -1 - j \quad \text{d. } \sqrt{325}e^{-j176,8^\circ} \quad \text{e. } 0,239 - j0,680$$

$$4. \quad k = -8,75$$

$$5. \quad \bar{z}_1 = 4e^{-j30^\circ} \quad \bar{z}_2 = 4e^{j45^\circ}$$

$$6. \quad z_1 = 2\sqrt{3} + j2 \quad z_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} - j\frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$7. \quad z_1 \cdot z_2 = 24 \cos 15^\circ - j24 \sin 15^\circ = 23,2 - j6,21 \quad z_1 + z_2 = 2\sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{2}} + j\left(2 - \frac{6}{\sqrt{2}}\right)$$

$$8. \quad x(t) = \frac{2}{2j} \left(e^{j10t} - e^{-j10t} \right) + \frac{5}{2} \left(e^{j30t} + e^{-j30t} \right) = -je^{j10t} + je^{-j10t} + 2,5e^{j30t} + 2,5e^{-j30t} =$$

$$= -e^{j90^\circ} \cdot e^{j10t} + e^{j90^\circ} \cdot e^{-j10t} + 2,5e^{j(30t+90^\circ)} + 2,5e^{-j(30t-90^\circ)} = -e^{j(10t+90^\circ)} + e^{-j(10t-90^\circ)} + 2,5e^{j30t} + 2,5e^{-j30t}$$

eller

$$x(t) = \frac{2}{2j} \left(e^{j10t} - e^{-j10t} \right) + \frac{5}{2} \left(e^{j30t} + e^{-j30t} \right) = -je^{j10t} + je^{-j10t} + 2,5e^{j30t} + 2,5e^{-j30t} =$$

$$= -e^{j90^\circ} \cdot e^{j10t} + e^{j90^\circ} \cdot e^{-j10t} + 2,5e^{j(30t+90^\circ)} + 2,5e^{-j(30t-90^\circ)} = e^{j(10t-90^\circ)} + e^{-j(10t-90^\circ)} + 2,5e^{j30t} + 2,5e^{-j30t}$$

$$9. \quad x(t) = \frac{3}{2j} \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} \right) - \frac{5}{2} \left(e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t} \right) + \frac{4}{2j} \left(e^{j4\omega t} - e^{-j4\omega t} \right) =$$

$$= -1,5je^{j\omega t} + 1,5je^{-j\omega t} - 2,5e^{j2\omega t} - 2,5e^{-j2\omega t} - 2je^{j4\omega t} + 2je^{-j4\omega t} =$$

$$= -1,5 \cdot e^{j90^\circ} \cdot e^{j\omega t} + 1,5e^{j90^\circ} \cdot e^{-j\omega t} - 2,5e^{j2\omega t} - 2,5e^{-j2\omega t} - 2e^{j90^\circ} \cdot e^{j4\omega t} + 2e^{j90^\circ} \cdot e^{-j4\omega t} =$$

$$= -1,5e^{j(\omega t+90^\circ)} + 1,5e^{-j(\omega t-90^\circ)} - 2,5e^{j2\omega t} - 2,5e^{-j2\omega t} - 2e^{j(4\omega t+90^\circ)} + 2e^{-j(4\omega t-90^\circ)}$$

$$10. \quad x(t) = \frac{j}{(-8 + j6)} \cdot e^{j100t} = \frac{j(-8 - j6)}{8^2 + 6^2} \cdot e^{j100t} = \frac{(6 - j8)}{100} \cdot e^{j100t} = \frac{10e^{-j53,1^\circ}}{100} \cdot e^{j100t} = \underline{\underline{0,1e^{j(100t-53,1^\circ)}}}$$

$$11. \quad x(t) = (3 + j4) \cdot e^{j100t} + (3 - j4) \cdot e^{-j100t} = 5 \cdot e^{j53,1^\circ} \cdot e^{j100t} + 5e^{-j53,1^\circ} \cdot e^{-j100t} =$$

$$= 5 \cdot e^{j(100t+53,1^\circ)} + 5 \cdot e^{-j(100t+53,1^\circ)} = \left[\begin{array}{c} \text{Eulers} \\ \text{formel} \end{array} \right] = 5 \cdot 2 \cdot \cos(100t + 53,1^\circ) = \underline{\underline{10 \cos(100t + 53,1^\circ)}}$$

$$12. \quad e^{j\pi} = -1$$

$$e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$e^{j3\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$13. \quad je^{-j\frac{\pi}{6}} = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}} = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} = \underline{\underline{e^{j\frac{\pi}{3}}}} \quad (j+1)e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)} = \underline{\underline{\sqrt{2}e^{-j\frac{5\pi}{12}}}}$$

14.

$$15. \quad 1 + e^{jk\frac{\pi}{2}} = e^{jk\frac{\pi}{4}} \cdot \left(e^{-jk\frac{\pi}{4}} + e^{jk\frac{\pi}{4}} \right) = e^{jk\frac{\pi}{4}} \cdot 2 \cdot \cos k\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{2e^{jk\frac{\pi}{4}} \cos k\frac{\pi}{4}}}$$

$$16. \quad 1 - e^{jk\frac{\pi}{2}} = e^{jk\frac{\pi}{4}} \left(e^{-jk\frac{\pi}{4}} - e^{jk\frac{\pi}{4}} \right) = e^{jk\frac{\pi}{4}} \left(-2j \cdot \sin k\frac{\pi}{4} \right) = -2je^{jk\frac{\pi}{4}} \cdot \sin k\frac{\pi}{4} = -2e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk\frac{\pi}{4}} \sin k\frac{\pi}{4} =$$

$$= -2e^{j2\frac{\pi}{4}} \cdot e^{jk\frac{\pi}{4}} \sin k\frac{\pi}{4} = -2 \cdot e^{j(k+2)\frac{\pi}{4}} \sin k\frac{\pi}{4}$$

$$17. \quad \frac{j}{1-jk\pi} e^{jk\frac{\pi}{4}t} = \frac{j(1+jk\pi)}{1+k^2\pi^2} e^{jk\frac{\pi}{4}t} = \frac{j-k\pi}{1+k^2\pi^2} \left(\cos k\frac{\pi}{4}t + j \sin k\frac{\pi}{4}t \right) =$$

$$= \frac{1}{1+k^2\pi^2} \left(-k\pi \cos k\frac{\pi}{4}t - \sin k\frac{\pi}{4}t + j \left(\cos k\frac{\pi}{4}t - k\pi \sin k\frac{\pi}{4}t \right) \right)$$
