

Idag

1. **Laplacetransform (rep.)**
2. **Invers Laplacetransform**
3. **Lösning av differentials ekvationer**

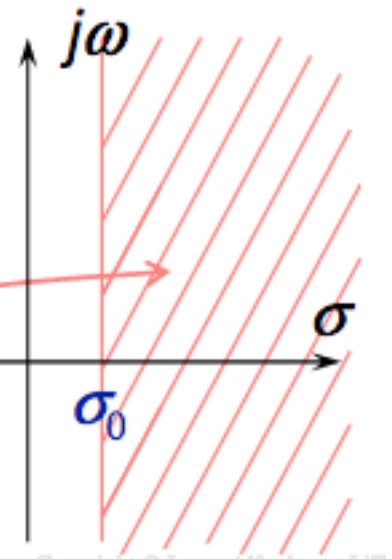
Laplacetransform

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

Konvergensområde

$$\sigma = \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_0$$

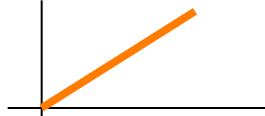
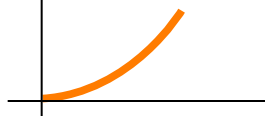
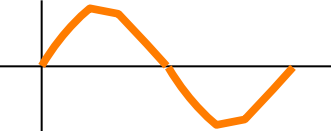
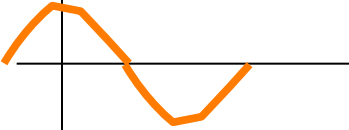


Exempel

Rita $f(t)$. Bestäm Laplacetransform av $f(t)$:

$$f(t) = 3[u(t-2) - u(t-3)]$$

Laplacetransform av vanliga funktioner

Name	$f(t)$		$F(s)$
Impulse	$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$		1
Step	$u(t) = 1; t > 0$		$\frac{1}{s}$
Ramp	$f(t) = t$		$\frac{1}{s^2}$
Exponential	$f(t) = e^{at}$		$\frac{1}{s - a}$
Sinus	$f(t) = \sin(\omega t)$		$\frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$
Cosinus	$f(t) = \cos(\omega t)$		$\frac{s}{\omega^2 + s^2}$
Monomial	$t^n u(t)$		$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	$e^{-at} t^n u(t)$		$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$

Laplace transform: egenskaper

Addition/skalning

$$a f(t) + b g(t) \Leftrightarrow a F(s) + b G(s)$$

Tidskift

$$L[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as} F(s)$$

FrekvensSkift
(Dämpning)

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$$

TidsDifferentiering:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

(generelt)

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{j=1}^n s^{n-j} f^{(j-1)}(0)$$

TidsIntegrering:

$$L\left[\int_0^\infty f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Invers Laplacetransform

Invers Laplacetransform

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

I praktiken används dock inte denna formel.

Vi kommer istället träna oss på att **genom omskrivningarkänna igen** (utifrån kända egenskaper och elementära transformer) vilken funktion som har en viss given Laplacetransform.

Invers Laplacetransform: så funkar det

Ex. $F(s) = \frac{1}{(s-2)^3}$ $f(t) = ?$

Från tabell avläser vi att

$$t^2 \rightarrow \frac{2}{s^3}$$

Tillsammans med räkneregel

$$e^{2t} f(t) \rightarrow F(s-2)$$

får vi då att

$$f(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}, t \geq 0$$

Partialbråsuppdelning

Att skriva om ett rationellt uttryck som summan av så enkla rationella uttryck som möjligt

$$F(s) = \frac{x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2} = x + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$$

Hur kommer vi fram till dess?

Steg 1: genomför en polynomdivision med rest

Detta gäller om täljarens gradtal är minst lika stor som nämnarens

$$\frac{x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2} = x + \frac{x + 5}{x^2 + x - 2}$$

Partialbråksuppdelning

Steg 2: faktorisera nämnaren så långt som det går

Vi löser andragradsekvationen

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

Steg 3: ansättning

$$\frac{x + 5}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 2}$$

$$x + 5 = (a + b)x + (2a - b)$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a - b = 5 \end{cases} \quad a=2; b=-1$$

Steg 4: ready to LT

$$\frac{x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2} = x + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$$

Partialbråksuppdelning

Distinkta reella rötter
förstagsfaktorer

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+8)} + \frac{c}{(s+6)}$$

Distinkta reella rötter
multipel-gradsfaktorer

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+1)^2} = \frac{a}{(s+1)^2} + \frac{b}{s+1}$$

Distinkta komplexa rötter

$$F(s) = \frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} = \frac{a}{s} + \frac{bx+c}{(s^2+6s+25)}$$

Exempel

Bestäm invers Laplacetransform av $F(s)$:

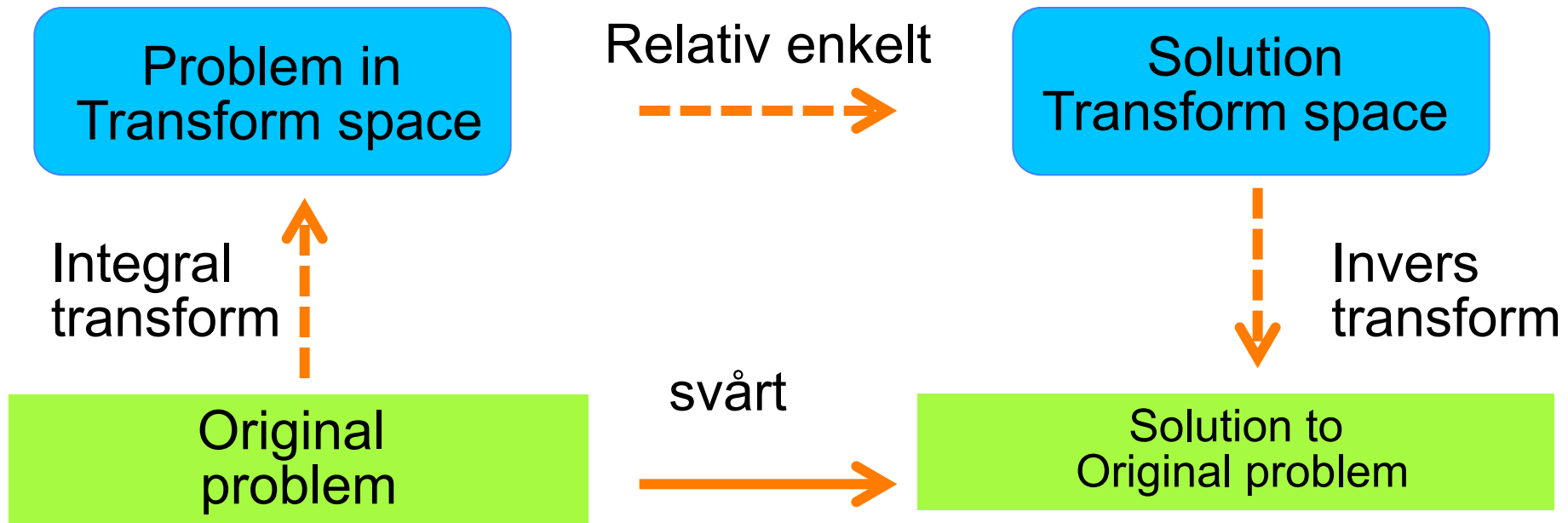
a)
$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

b)
$$F(s) = \frac{10(s+3)}{s^2 + 25}$$

Lösning av ODE med Laplacetransform

ODE: ordinär differentialekvation

Hela poängen med (Fourier/Laplace) transformer



Lösning av ODE med LT: så funkar det (1)

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t, & t \geq 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Laplacetransformering av båda led i ekvationen ger

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Använder vi begynnelsevillkoren och löser ut $Y(s)$ så får vi

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s^2 - 3s + 2)}$$

Lösning av ODE med LT: så funkar det (2)

Partialbråksuppdelning ger sedan att

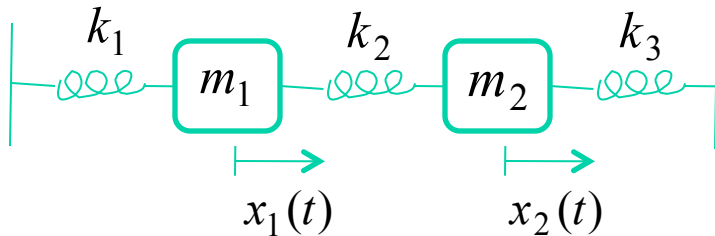
$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s^2 - 3s + 2)} = \frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{5}{4(s-2)}$$

och med hjälp av våra tabeller finner vi att

$$y(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t - 2e^t + \frac{5}{4}e^{2t}$$

Entydighetssatsen ger att detta är lösningen för $t \geq 0$

Exempel: System av differentialekvationer (1)



$$\begin{cases} m_1 x_1''(t) = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2''(t) = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 \end{cases}$$

Antag att $m_1 = m_2 = k_1 = k_2 = k_3 = 1$ och att

$$x_1(0) = -1, x_1'(0) = 0, x_2(0) = 1, x_2'(0) = 0$$

Laplacetransformering ger

$$\begin{cases} s^2 X_1(s) + s = X_2(s) - 2X_1(s) \\ s^2 X_2(s) - s = X_1(s) - 2X_2(s) \end{cases}$$

Exempel: System av differentialekvationer (2)

Löser vi detta ekvationssystem m.a.p. $X_1(s)$ och $X_2(s)$ så får vi

$$X_1(s) = \frac{-s}{s^2 + 3} \quad \text{och} \quad X_2(s) = \frac{s}{s^2 + 3}$$

Med hjälp av våra tabeller avläser vi sedan att

$$x_1(t) = -\cos(\sqrt{3}t) \quad \text{och} \quad x_2(t) = \cos(\sqrt{3}t)$$

Vilket alltså är lösningarna på systemet för $t \geq 0$

Laplace transform i Matlab

Exempel

Use Matlab to find the transform of $f(t) = te^{-4t}$

Matlabkod

```
syms t,s  
laplace(t*exp(-4*t),t,s)  
ans =  
 $1/(s+4)^2$ 
```

InversLaplacetransform i Matlab

Exempel

Use Matlab to find the inverse transform of

$$F(s) = \frac{s(s+6)}{(s+3)(s^2+6s+18)}$$

Matlabkod

```
syms s t
```

```
ilaplace(s*(s+6)/((s+3)*(s^2+6*s+18)))
```

```
ans =
```

```
-exp(-3*t)+2*exp(-3*t)*cos(3*t)
```

Läsa på...

Pedagogiska videor som förklarar Laplacetransformen

<https://www.khanacademy.org/math/differential-equations/laplace-transform>

Ännu mer pedagogiska videor som förklarar nästan hela kursen:

[**https://www.youtube.com/playlist?list=PL41692B571DD0AF9B**](https://www.youtube.com/playlist?list=PL41692B571DD0AF9B)