

Linjära system SSY020

Hana Dobšíček Trefná

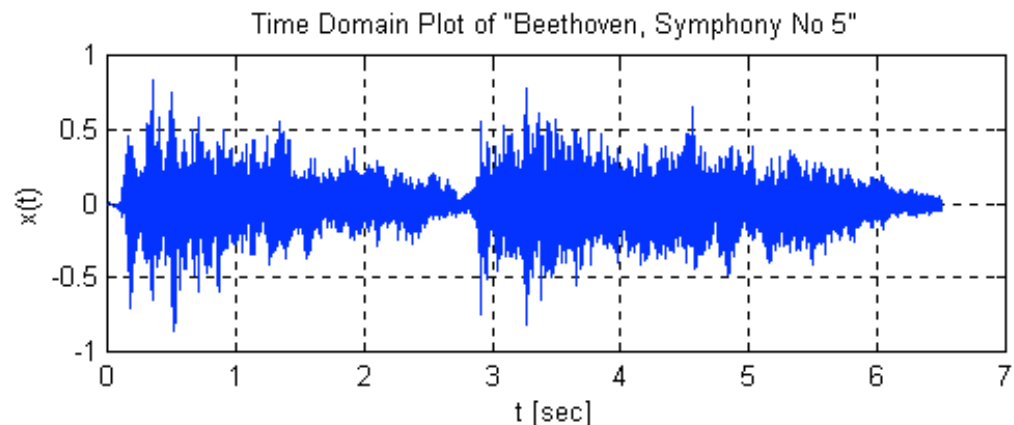
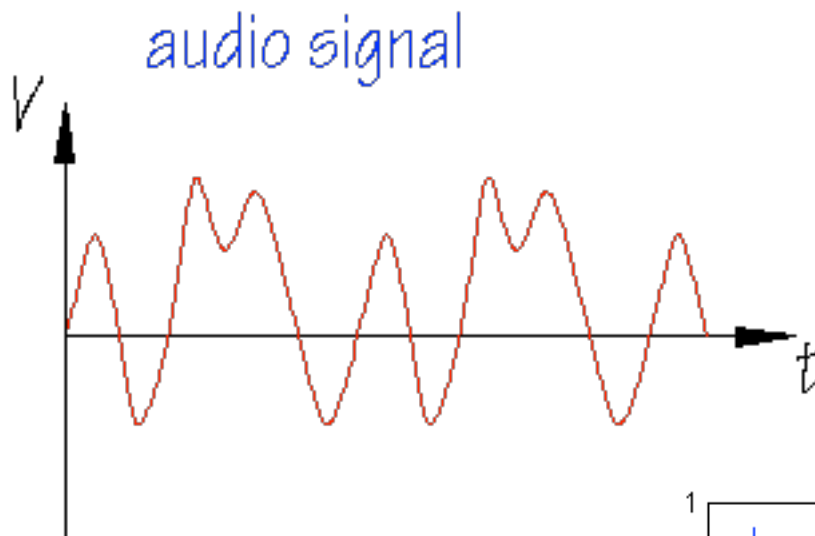
Signaler och system
group of Biomedical Electromagnetics
hanatre@chalmers.se

Syfte

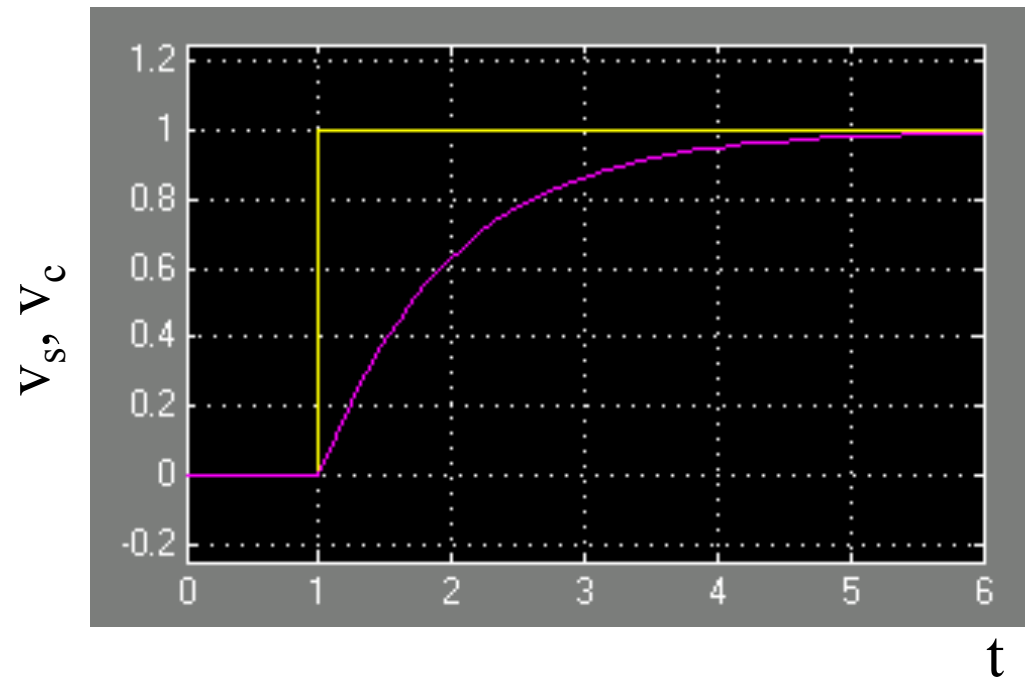
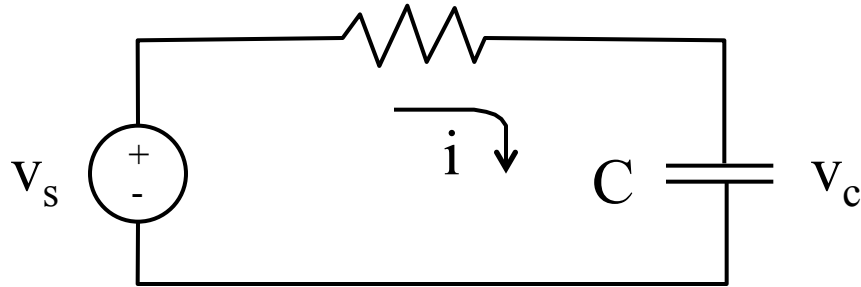
Att ge kunskap om hur man använder transformer för att analysera tidsdiskreta och tidskontinuerliga signaler och system

Signal

- En signal är ett mönster av variation av någon form
- informationsbärare från sändare till en eller flera mottagare

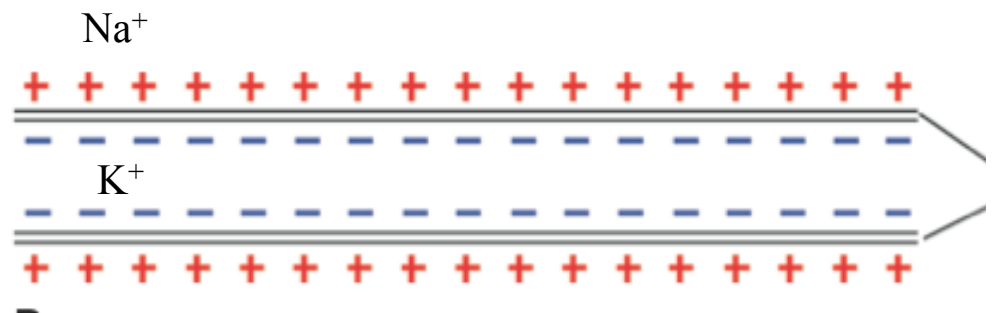
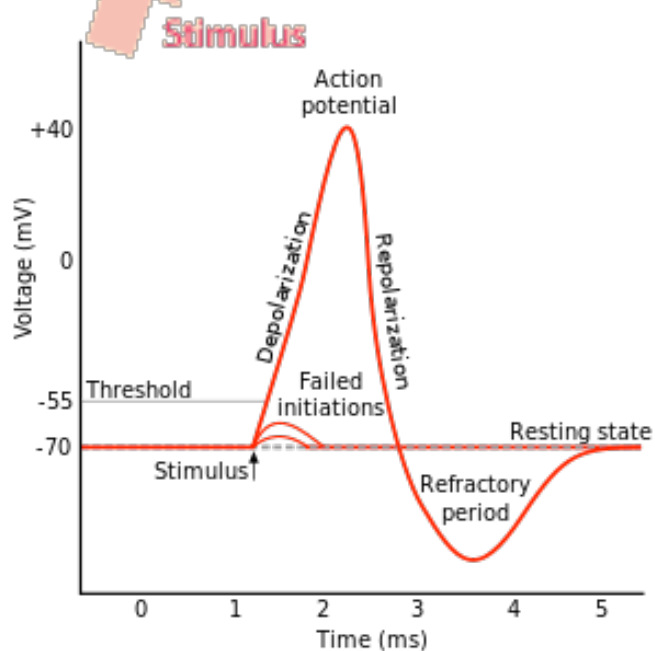
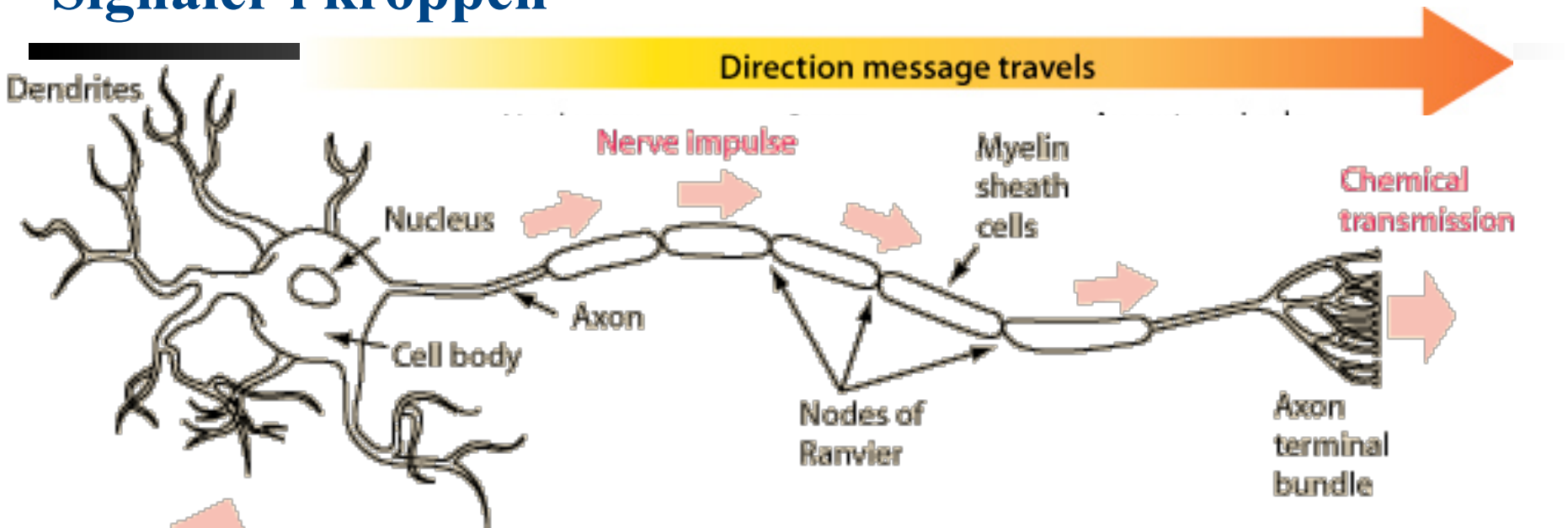


Exempel: Signal i en elektriska kretsen

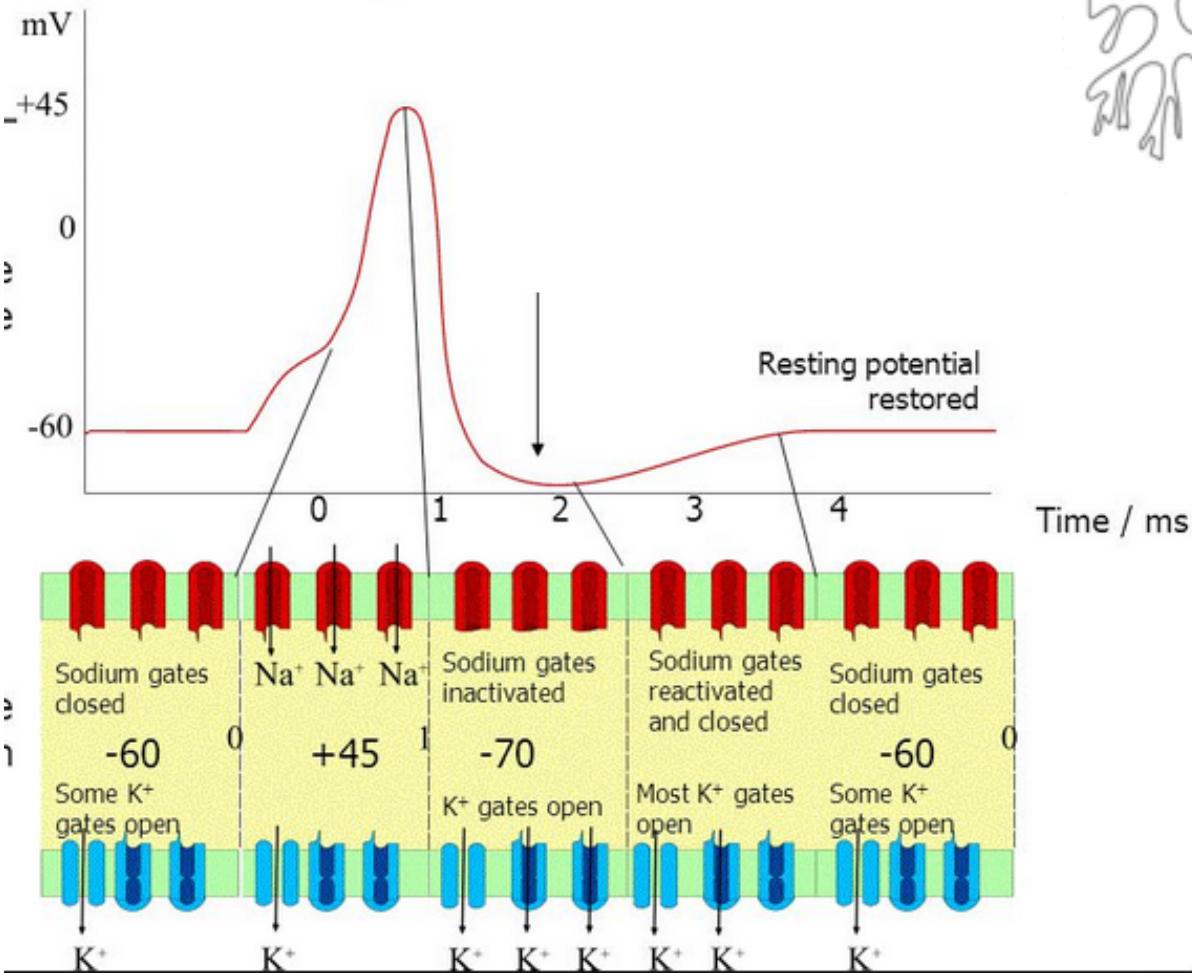
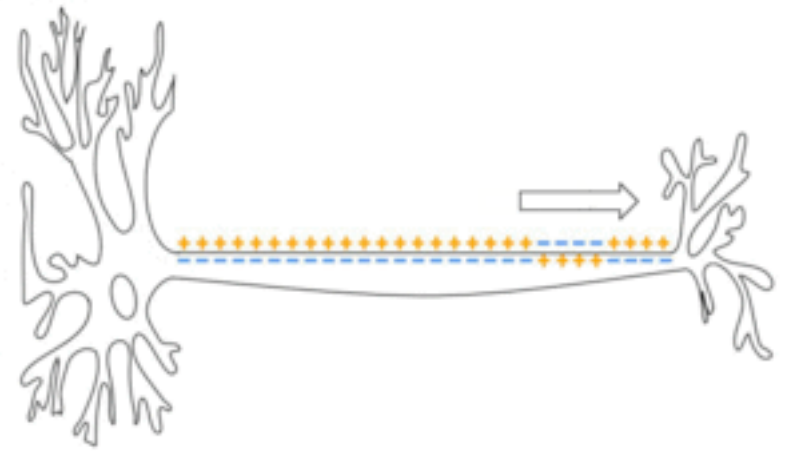


Signalerna v_c and v_s är mönster variationer över tiden

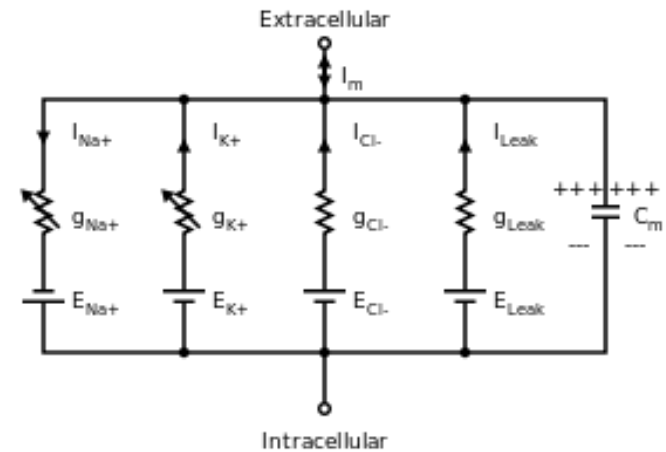
Signaler i kroppen



Signaler i kroppen



Elektrisk model



Signal

- En signal är ett mönster av variation av någon form
- informationsbärare från en sändare till en eller flera mottagare

Videosignal

En svartvit videosignalstyrka är beroende av x, y-koordinater och tiden t

$$f(x, y, t)$$



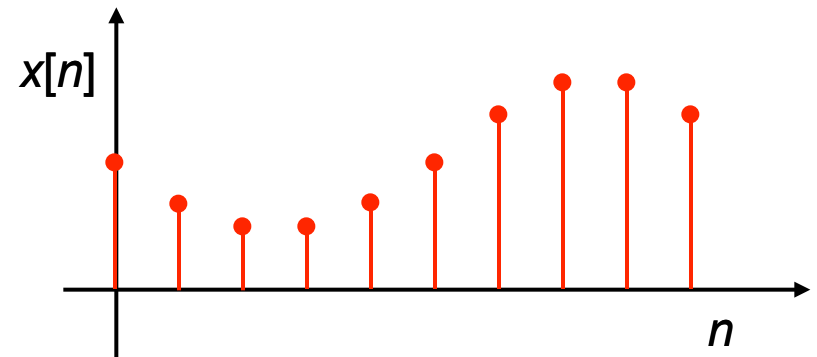
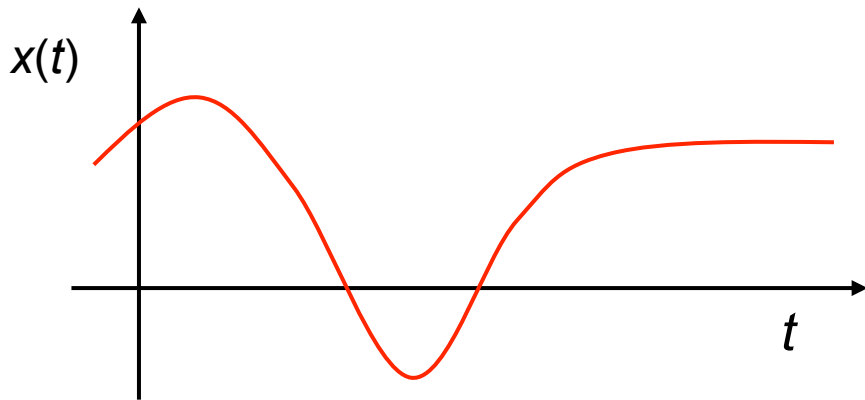
Intensitetsnivå av en pixel över tiden

Hur en signal representeras?

Matematiskt, signaler representeras som en funktion av en eller flera oberoende variabler.

Till exempel en svartvit videosignalstyrka är beroende av x, y-koordinater och tiden $t \rightarrow f(x, y, t)$

I den här kursen, avser vi signaler som är en funktion av en enda variabel: tid



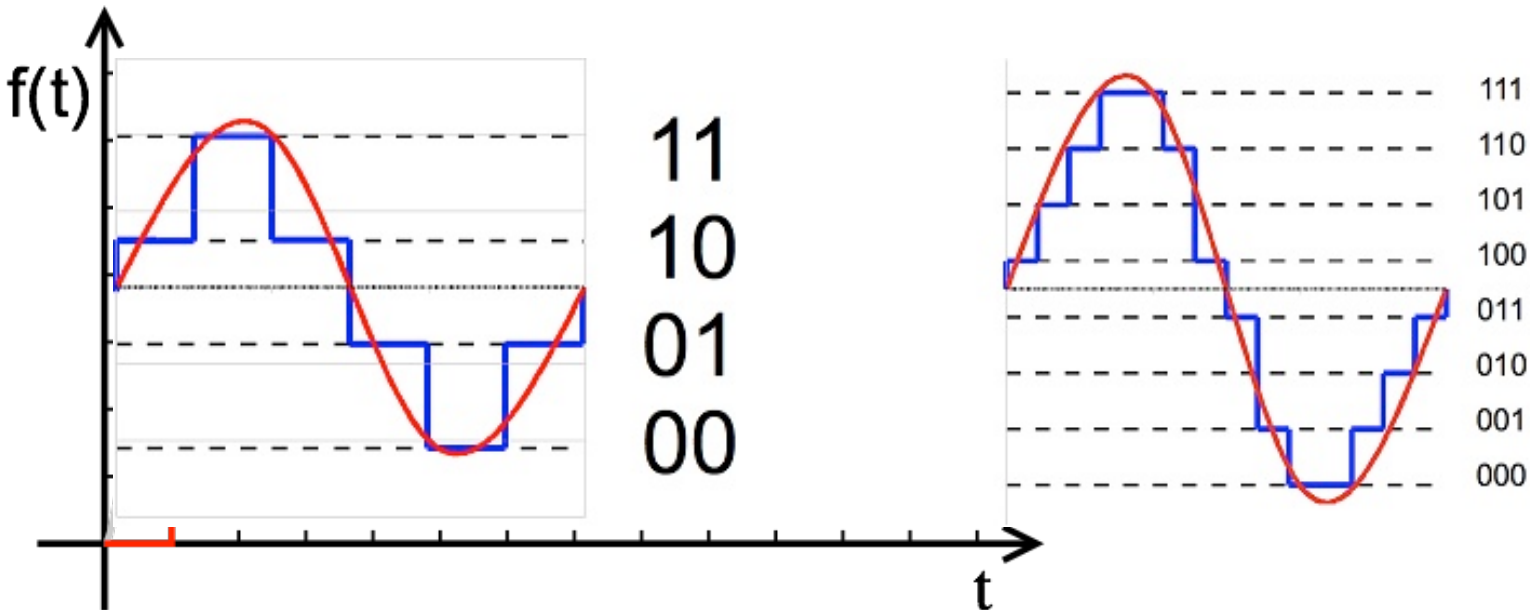
Hur en signal representeras?

Analoga signaler

kan ha ett oändligt antal värden i ett intervall

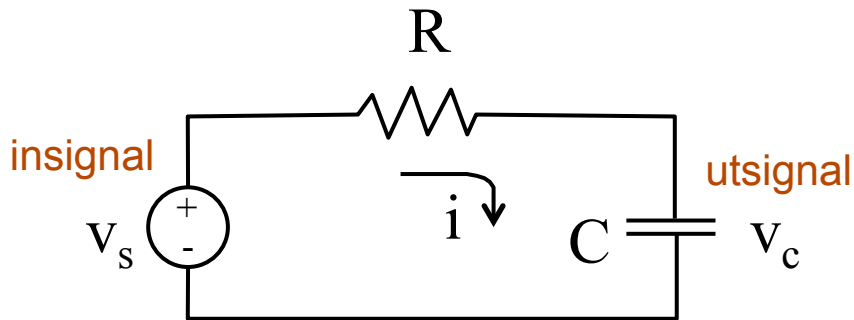
Digitala signaler

kan endast ha ett begränsat antal värden
ofta bara 0 och 1



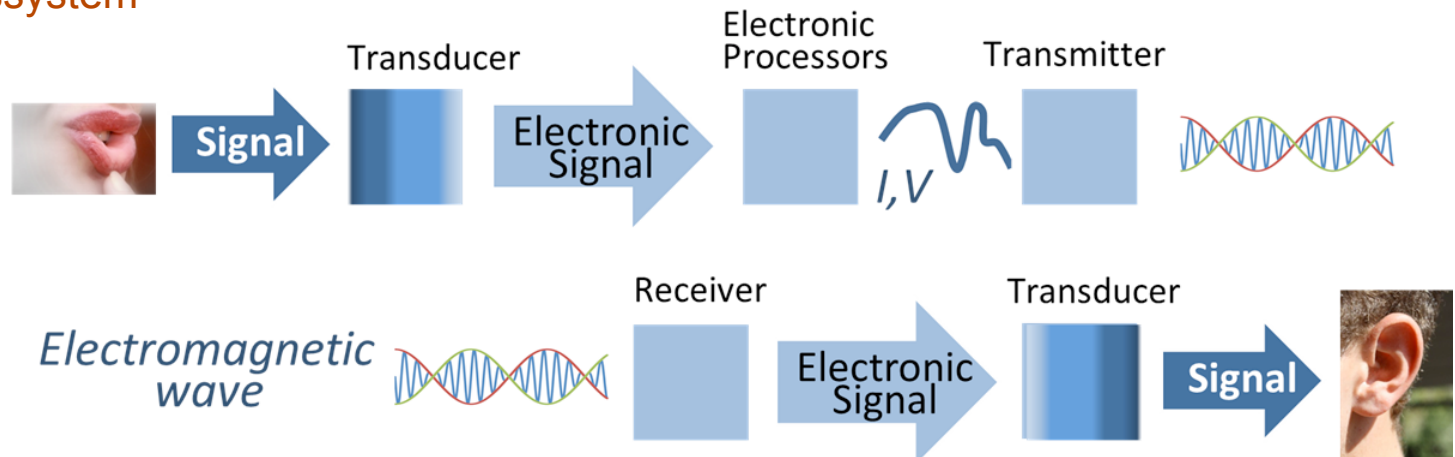
System

System bearbetar insignaler för att producera utsignaler



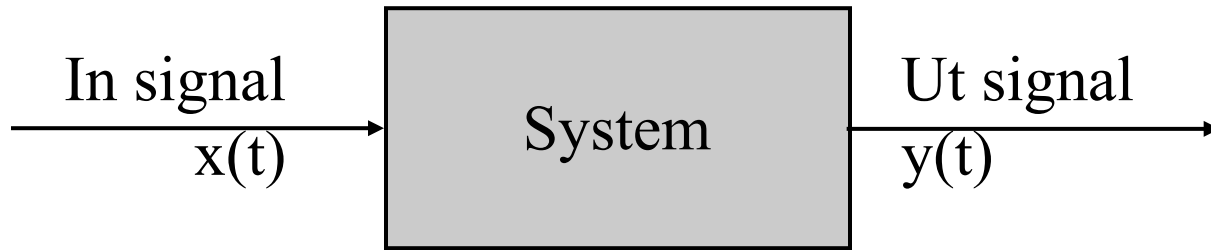
ett system som omvandlar
källspänning (signal) med
spänningen (signal) över
kondensatorn

Kommunikationssystem



Hur en system representeras?

Ett system tar en signal som en insignal och omvandlar den till en annan signal



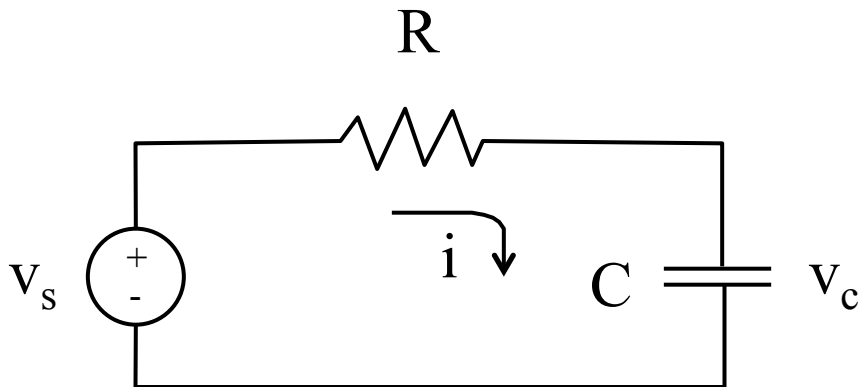
förhållandet mellan den utgående signalen över insignalen

På det sättet, när vi "multiplicerar" systemet genom ingångssignalen , får vi utsignalen

Detta koncept kommer att bekräftas i de närmaste veckorna

Hur ett system behandlas/representeras?

Differential ekvation



$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_s(t)$$

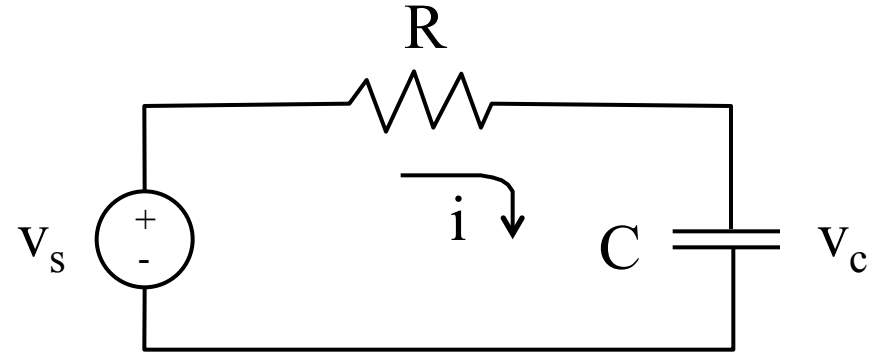
Hur ett system behandlas/representeras?

Matlab

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = u(t-1)$$

Example (DT first order system)

```
>> n = 0:10;  
>> x = ones(size(n));  
>> x(1) = 0;  
>> y(1) = 0;  
>> for i=2:11  
    y(i) = (y(i-1) + x(i))/2;  
end  
>> plot(n, x, 'x', n, y, '.')
```

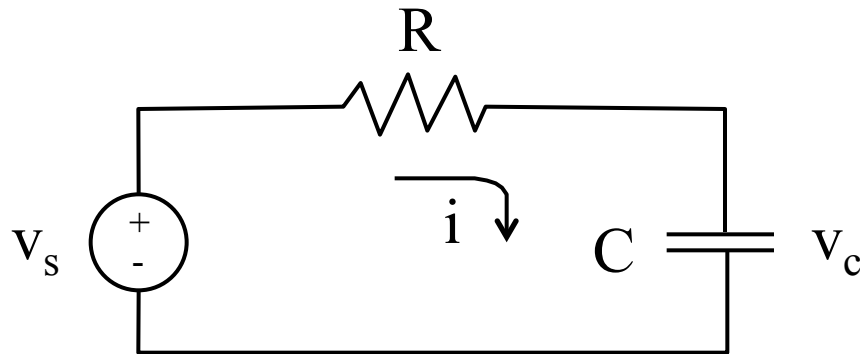


I Matlab en diskret signal representeras som en indexerad vektor.

Därför kan en matris eller en *for* loop kan användas för att transformera en vektor in i en annan

Hur ett system behandlas/representeras?

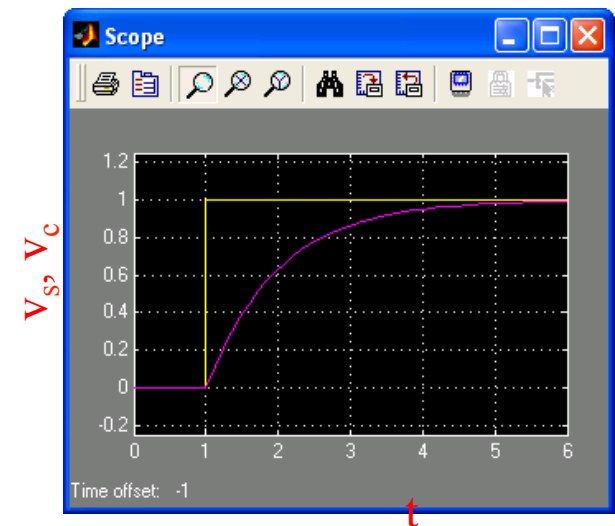
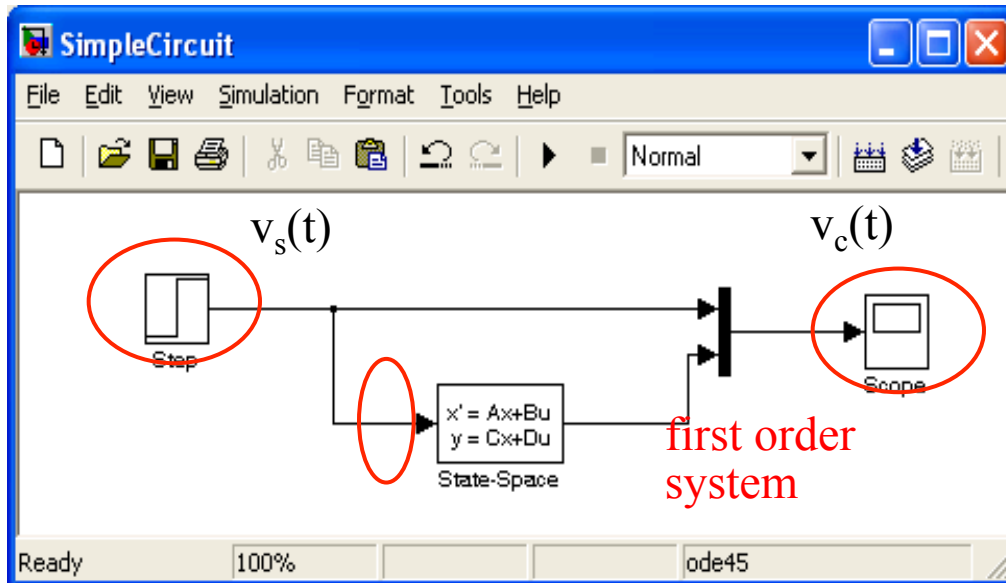
Simulink



$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_s(t)$$

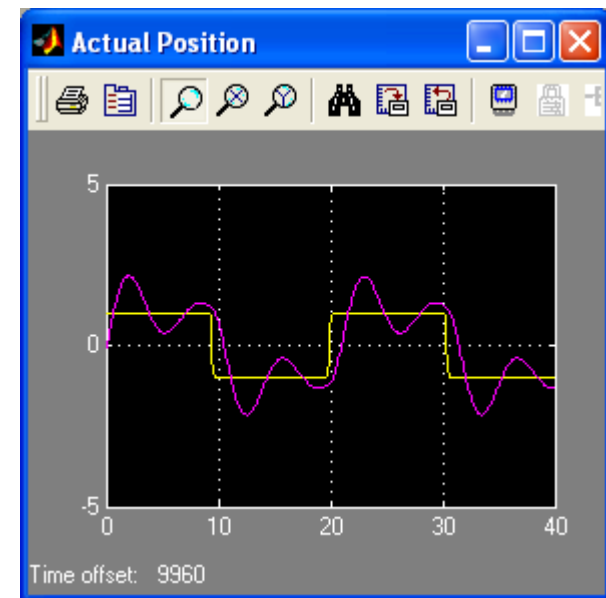
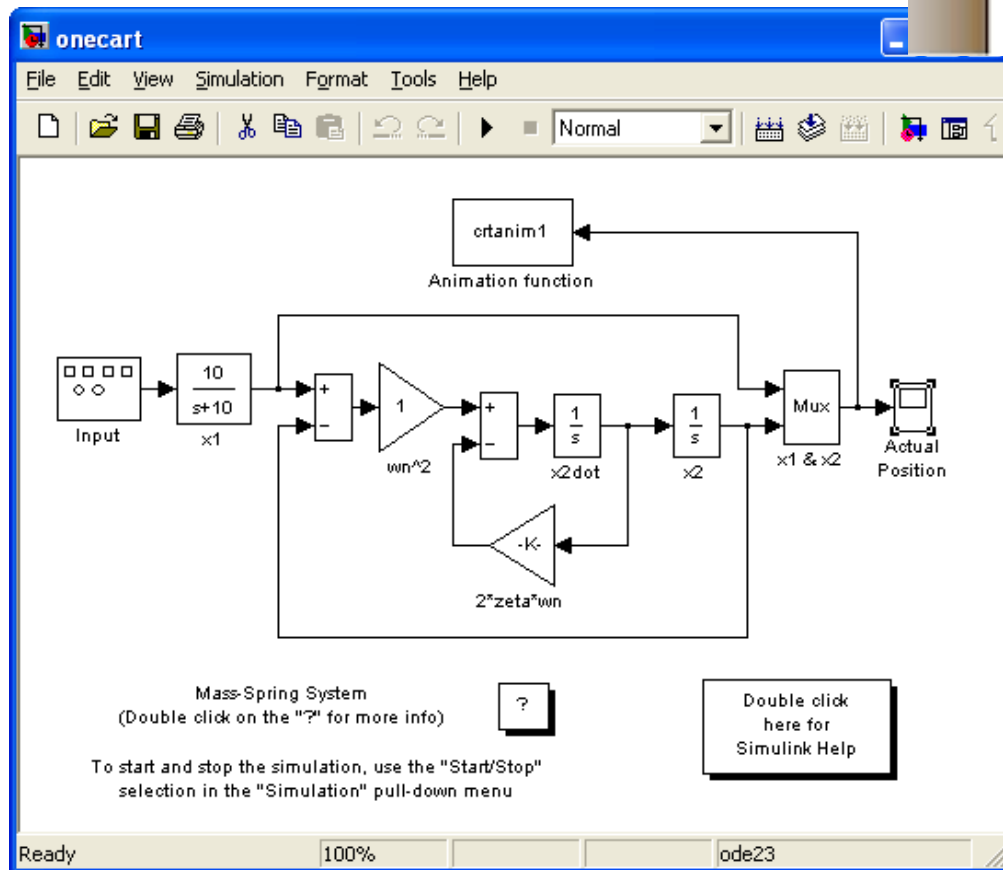
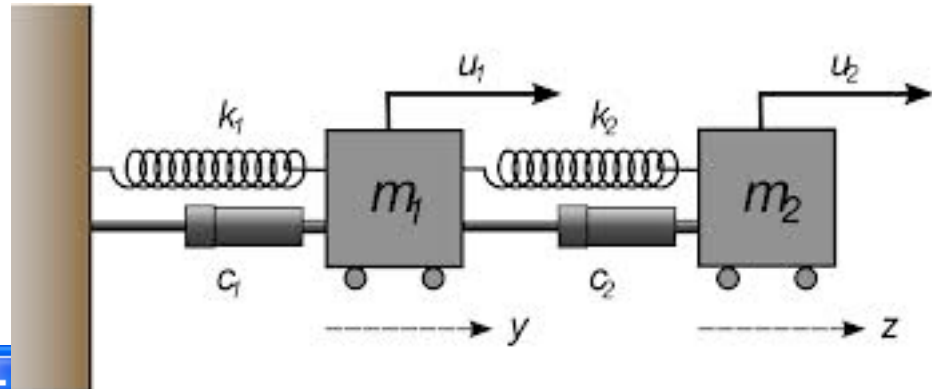


Ej i denna kurs

Hur ett system behandlas/representeras?

Simulink

Mass-fjäder model



Square wave input signal
oscillatory output signal

Hur relateras signaler och system (I)

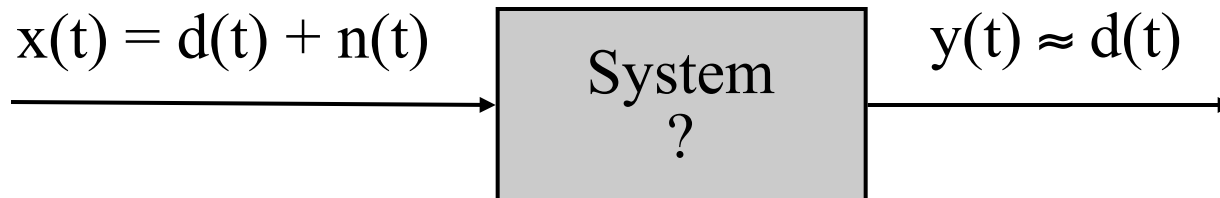
Hur utforma ett system för att återställa eller förbättra en viss signal

- **Filtrera** högfrekvent bakgrundsbrus
- **Förbättra** brusiga bilder från rymdfarkoster

Assume a signal is represented as

$$x(t) = d(t) + n(t)$$

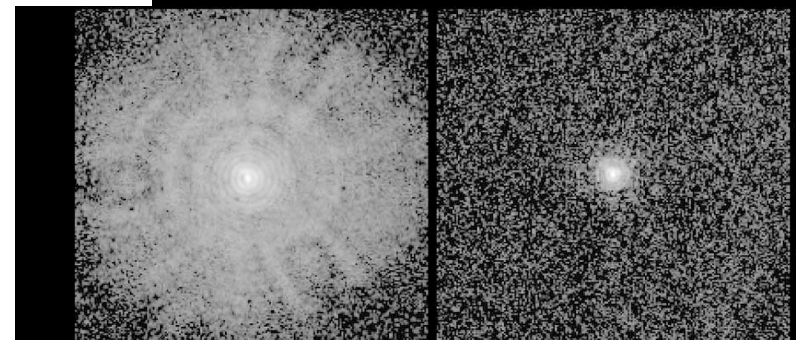
Design a system to remove the unknown “noise” component $n(t)$, so that $y(t) \approx d(t)$



Hur relateras signaler och system (I)



HUBBLE SPACE TELESCOPE
FAINT OBJECT CAMERA
COMPARATIVE VIEWS OF A STAR



BEFORE COSTAR

AFTER COSTAR

Hur relateras signaler och system (II)

Hur designa ett system för att extrahera specifik del av information från signaler

Analysera hjärtfrekvensen från en elektrokardiogram

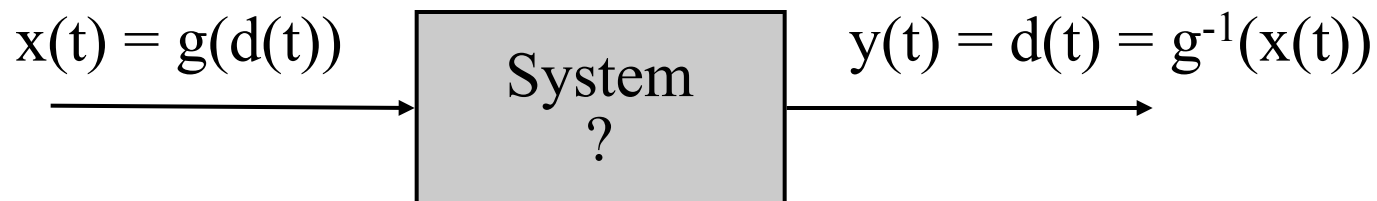
Uppskatta ekonomiska indikatorer från börsvärden (bear x bull market)

Undersöka stabiliteten hos fysiska strukturer

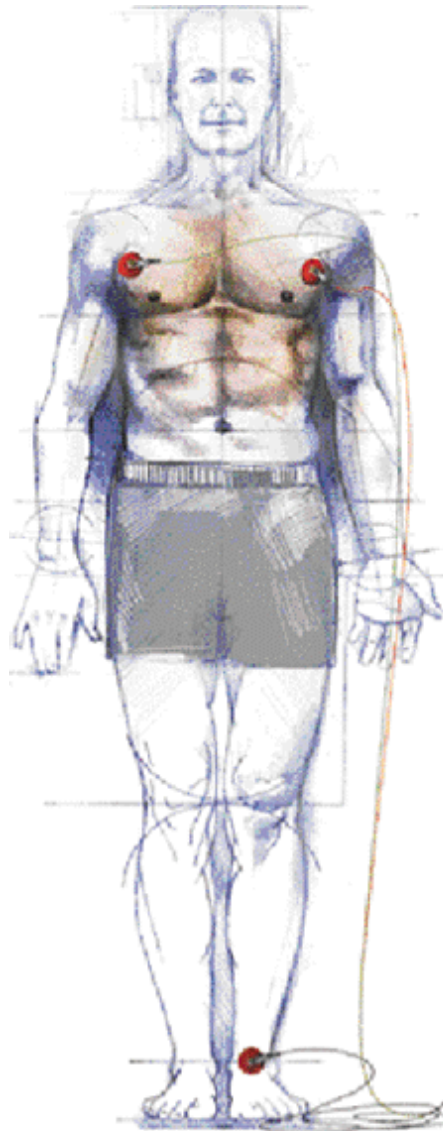
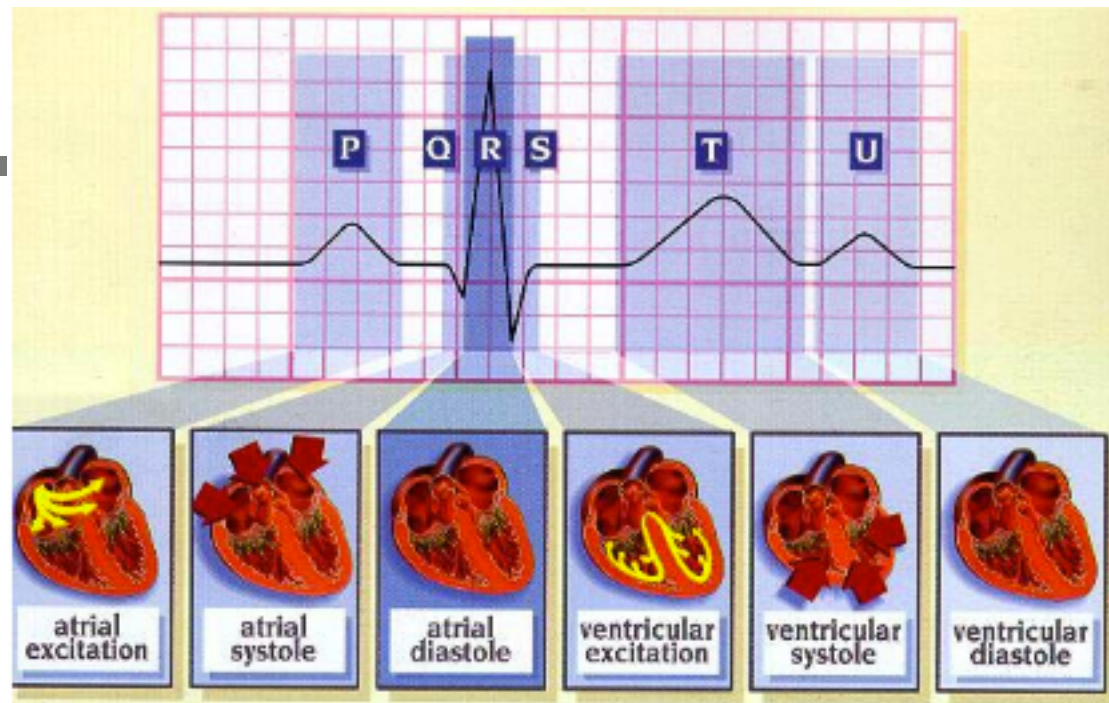
Assume a signal is represented as

$$x(t) = g(d(t))$$

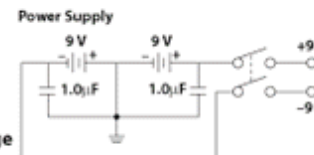
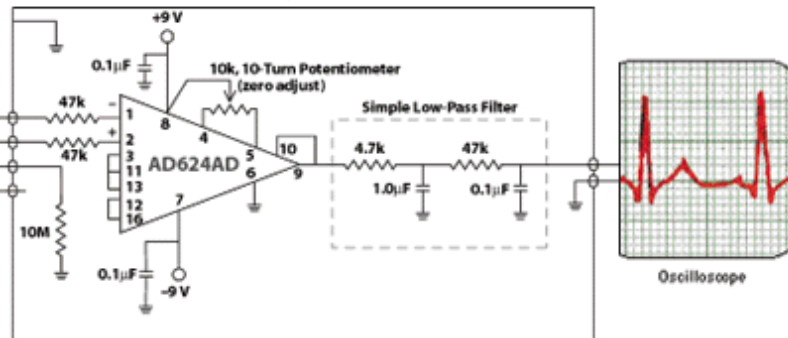
Design a system to “invert” the transformation $g()$, so that $y(t) = d(t)$



Signaler från hjärta



HEART OF THE APPARATUS is an amplifier and filter circuit, which boosts the feeble voltages measured across different points on the skin. Use of the instrumental amplifier, rather than a standard operational amplifier, ensures a precise voltage difference even if the absolute voltage level fluctuates. The output can be displayed on an oscilloscope or on a home-built monitor.

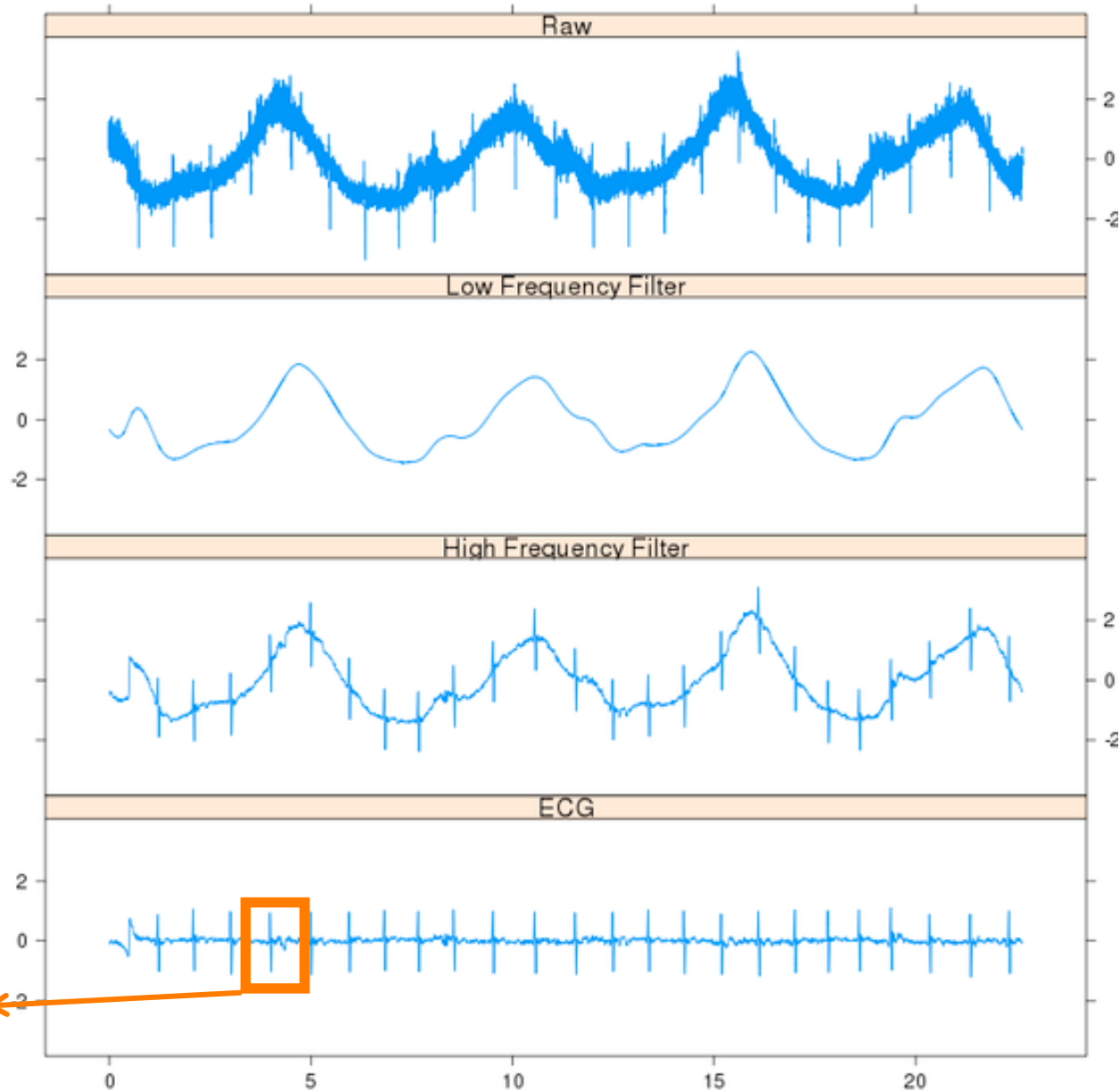
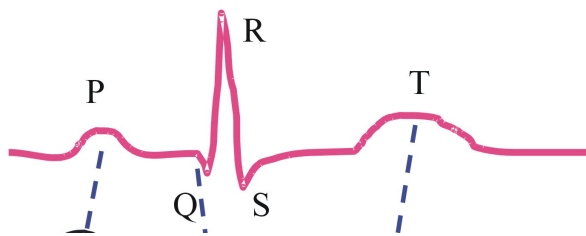


Signaler från hjärta

Mättdata

Lågpasfilter (30Hz)

Högpasfilter (1Hz)



Hur relateras signaler och system (III)

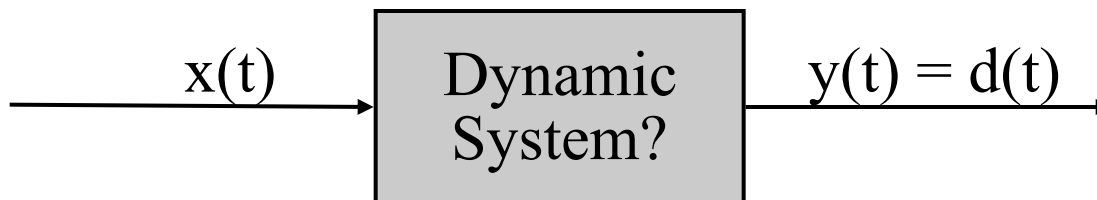
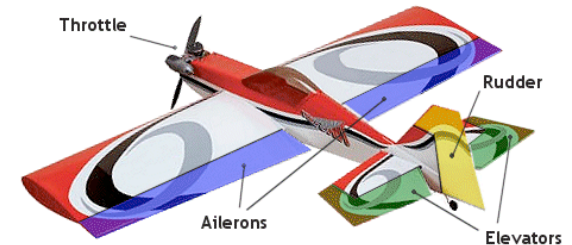
Hur man designar en (dynamisk) system för att modifiera eller kontrollera utsignal av en annan (dynamiskt) system

- **Styr** ett flygplans höjd, hastighet, riktning genom att justera spjäll, roder, skevroder
- **Reglera** temperaturen hos en byggnad genom att justera värme/kyla energiflödet

Assume a signal is represented as

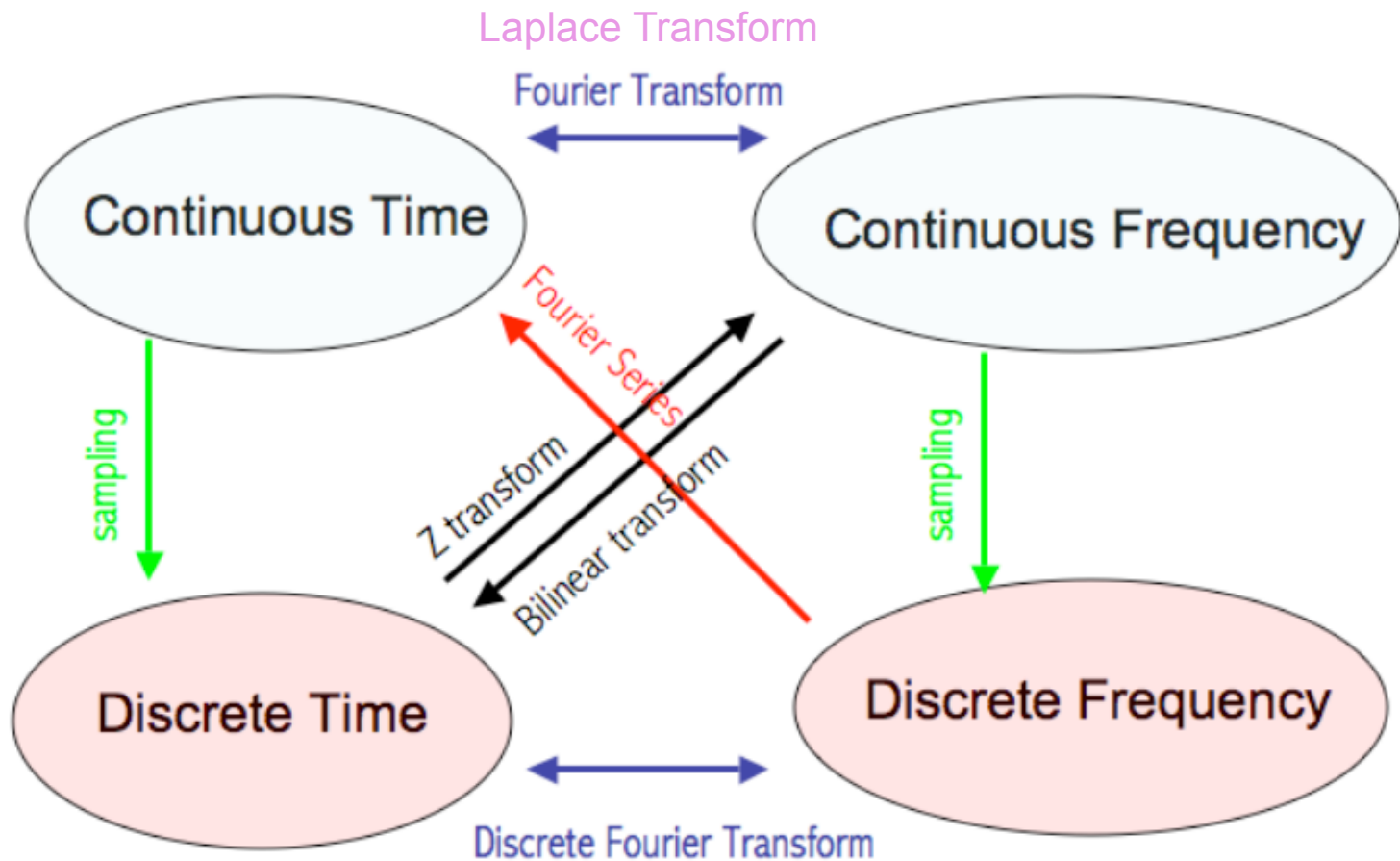
$$x(t) = g(d(t))$$

Design a system to ensure that $y(t) = d(t)$



Syfte

Att ge kunskap om hur man använder transformer för att analysera tidsdiskreta och tidskontinuerliga signaler och system



Föreläsare

Hana Dobsicek Trefna,

hanatre@chalmers.se, 031-7725052

Office: Johanneberg,,
S2, EDIT-building, Room 7318

Övningsledare

Elektro:

Samar Hosseinzadegan samarh@chalmers.se

Mekatronik:

Carl Toft carl.toft@chalmers.se

Kurs websida

pingpong

<https://pingpong.chalmers.se/launchCourse.do?id=7233>

Kurslitteratur

Lars Bengtson, Bill Karlström Transformer och filter

Kompletterande material

Andra material

Per Jönsson, Matlab, beräkningar inom teknik och naturvetenskap
Mastering Matlab (2012 Edition), Prentice Hall
Matlab help

Examination

Slutbetyg i skala 3-5

1. Tentamen

10 problem; 40 poäng

godkänd vid 16p

Hjälpmedel vid tentamen: utdelad formelsamling och typgodkänd räknare

Dugga (Frivilligt):

5 poäng till tenta

2. Obligatoriska inlämningsuppgifter (1,5p)

4 problem varav 2 teoretiska och 2 praktiska som ska lösas med hjälp av matlab

21/9 8:15 – 10:15 (Jupiter 041)

Signal transformation

Fourier transform

Laplace transform (början)

Inlämningsuppgifter

Veckan 5

Lösningar ska vara inlämnade senast 17/10 kl 23:59:59

Teoretisk uppgift

1. Eletro: filter

1. Mekatronik: lösa differentialekvationer från Dynamiska system

2-4: Gemensamma problem

överföringsfunktion; Bode diagram, stabilitet;
lösa teoretiskt eller med hjälp av Matlab

Repetition

Idag

1. **Vektorer**
2. **Kompleksa tal**
3. **Sin/cos funktioner**

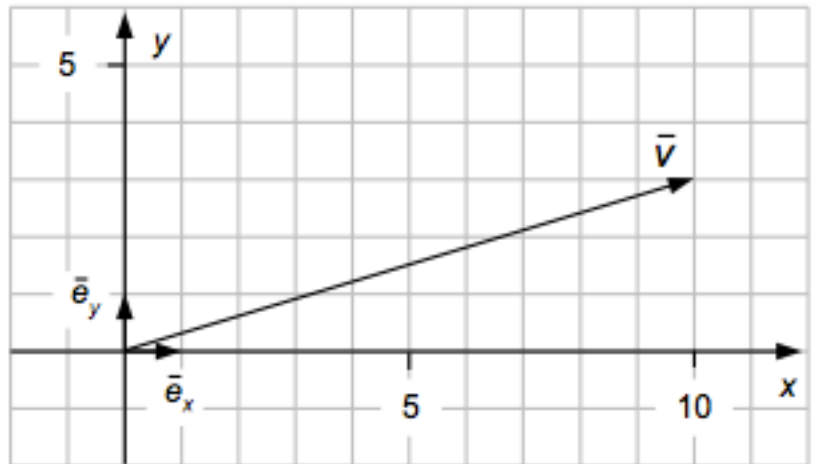
Vektor (Pil)



Basvektor

$\vec{e}_x, \vec{e}_y$

Enhetsvektorer
ortogonala



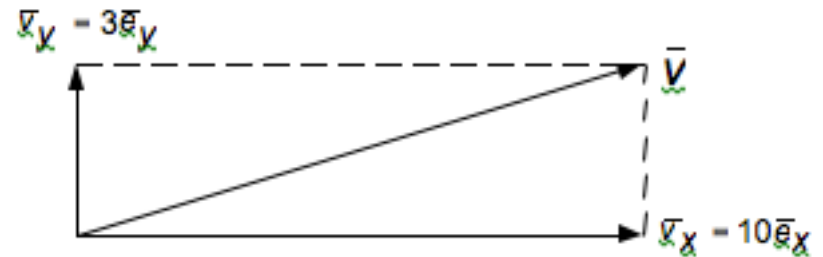
Vektor (Pil)



$\mathbb{R}^2$

Vi säger att vi *projicerar* vektorn

$$\bar{v} = c_x \cdot \bar{e}_x + c_y \cdot \bar{e}_y$$

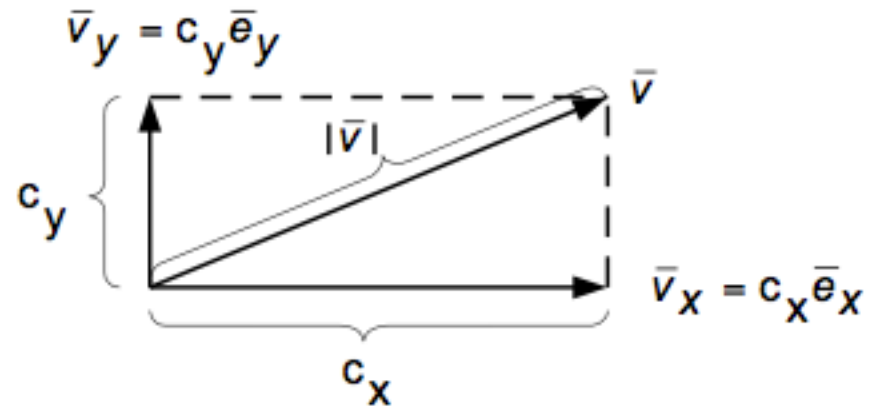


$\bar{e}_x, \bar{e}_y$

Enhetsvektorer
ortogonala

Vektor (Pil)

$$c_i = \bar{v} \cdot \bar{e}_i$$



$$\bar{v} = c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 + c_3 \bar{e}_3 + \dots + c_n \bar{e}_n = \sum_{k=1}^n c_k \bar{e}_k$$

Vektor beskrivas med c koefficienterna ($c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$)

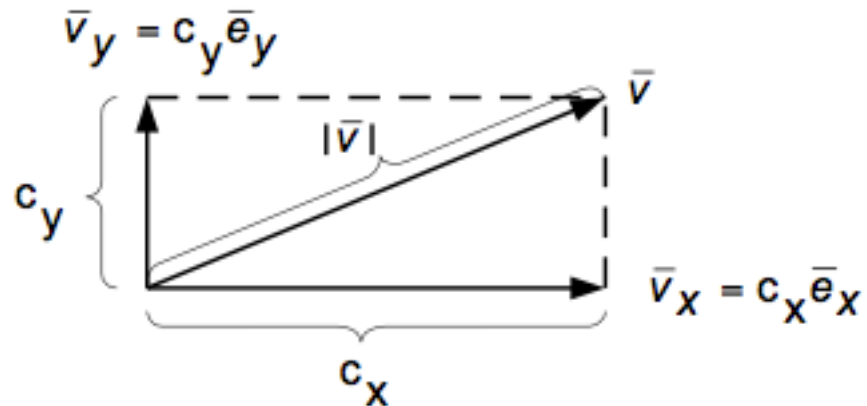
Vektoraddition

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n)$$

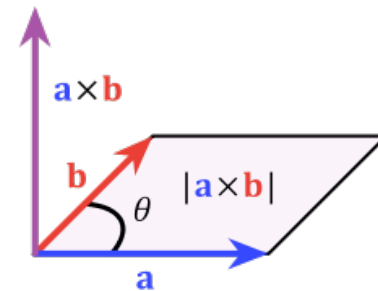
Vektor (Pil)

Skalärprodukt

$$|\bar{v}| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$$



OBS vektor/kryss produkt är något annat



Ortonormerad bas

Dess basvektorer är parvis ortogonala
Basvektorernas norm är 1

Komplexa tal

Imaginära enheten

$$j^2 = -1$$

eller

$$i^2 = -1$$

exempel

$$\sqrt{-81} = \sqrt{-1 \cdot 81} = i \cdot 9 = 9i$$

Komplex nummer

$$z = a + jb$$

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Re}(z) = a & \text{realdel} \\ \operatorname{Im}(z) = b & \text{imaginärdel} \end{array}$$

Komplexa tal

Imaginära enheten

$$\mathbf{j}^2 = -1$$

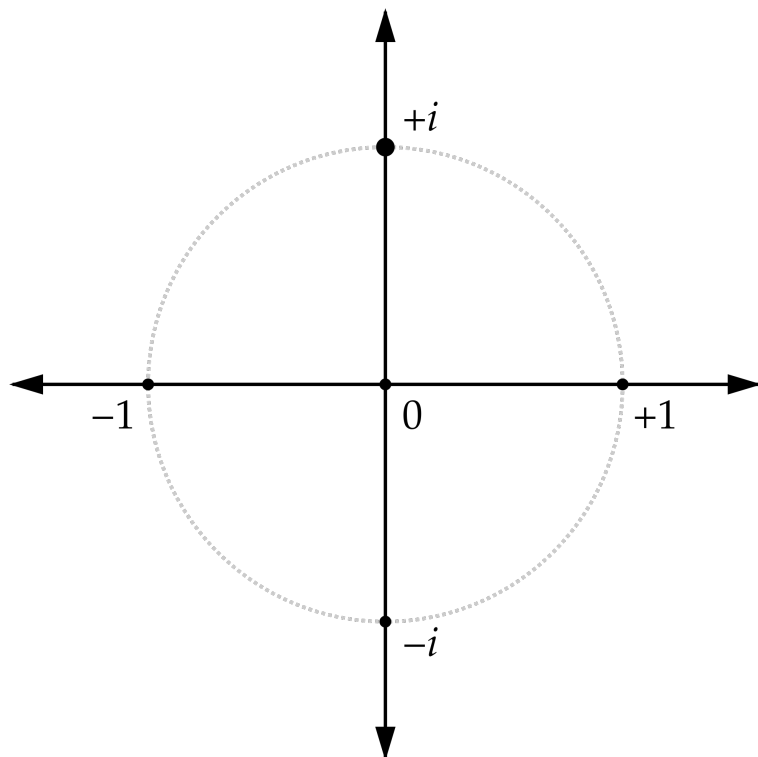
eller

$$\mathbf{i}^2 = -1$$

Komplex nummer

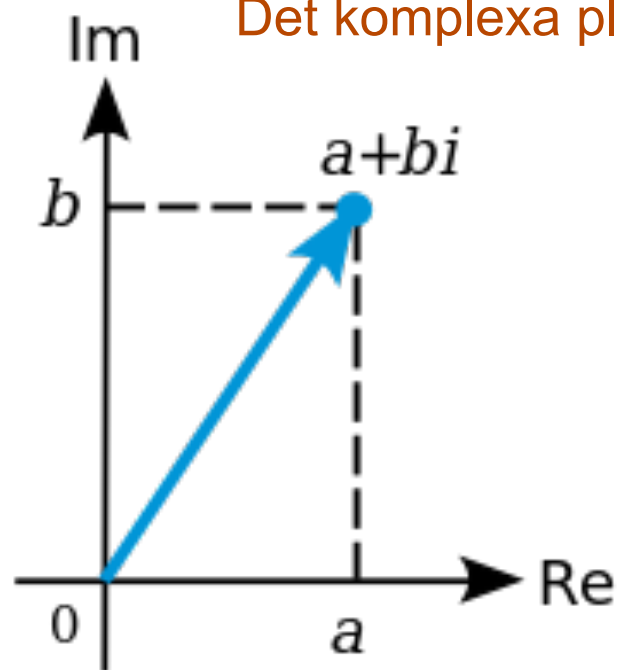
$$z = a + jb$$

Kompleksa tal



$$i^2 = -1$$

Det kompleksa planet



Komplexa tal

Algebraiska operationer

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Multiplying Complex Numbers

$$(a + bi)(c + di) = (ac) + (adi) + (cbi) + (bd)i^2$$

Komplexkonjugatet

$$z = a - jb$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 - (jb)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$$

Reellt tal

Rationalize

Skriv på rektangulär form

$$\frac{2}{1-i} :$$

Rationalize

$$\frac{2}{1-i} :$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{1-i} &= \frac{2}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \\ &= \frac{2+2i}{1-i^2} = \frac{2+2i}{1+1} \\ &= \frac{2+2i}{2} = 1+i\end{aligned}$$

Komplexa tal: olika form

Rektangulär form

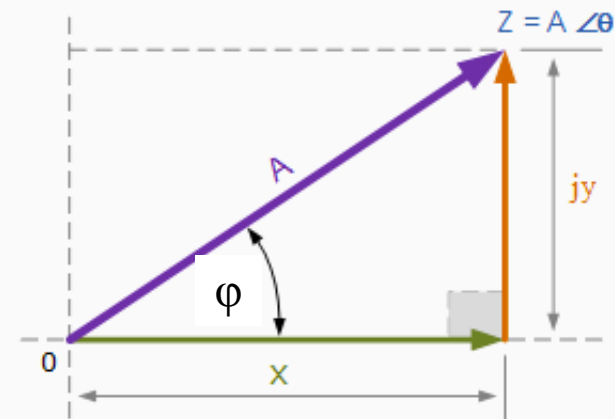
$$z = a + jb$$

Polar form

$$z = A \angle \varphi$$

Exponential form

$$z = Ae^{j\varphi}$$



When the representation of a point is based around the triangular form, we can use simple geometry and Pythagoras's Theorem on triangles to find both the magnitude and the angle. From school, trigonometry deals with the relationship between the sides and the angles in a triangle. The relationships between the sides are as follows:

$$A^2 = x^2 + y^2$$

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Also, } x = A \cos \varphi \quad y = A \sin \varphi$$

Therefore, the angle θ of A is given as follows.

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Komplexa tal: olika form

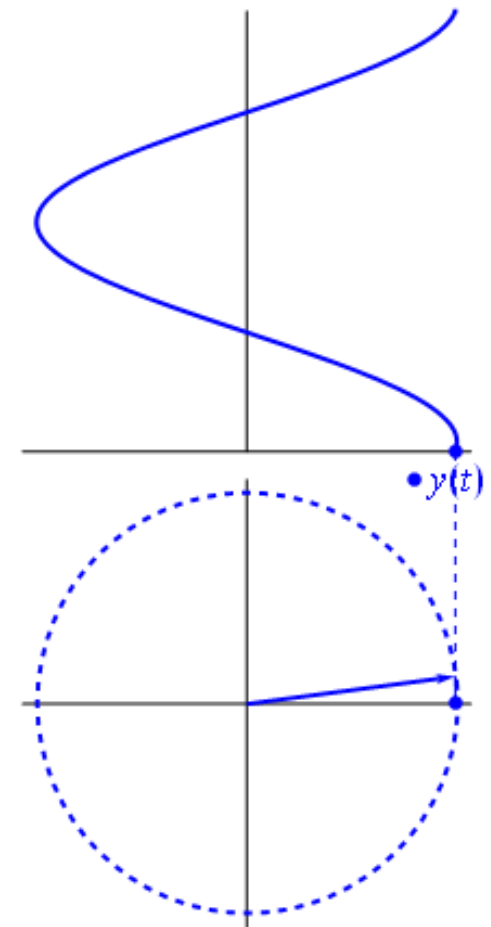
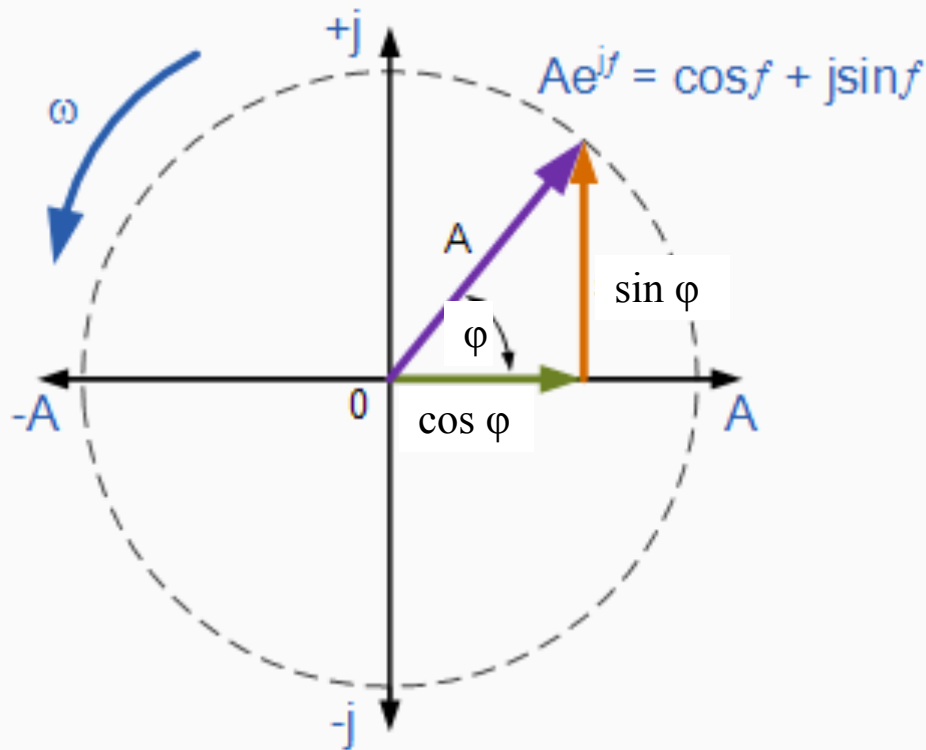
Polar

Exponential

$$Z = x + jy = A \angle \varphi = A (\cos \varphi + j \sin \varphi) = A e^{j\varphi}$$

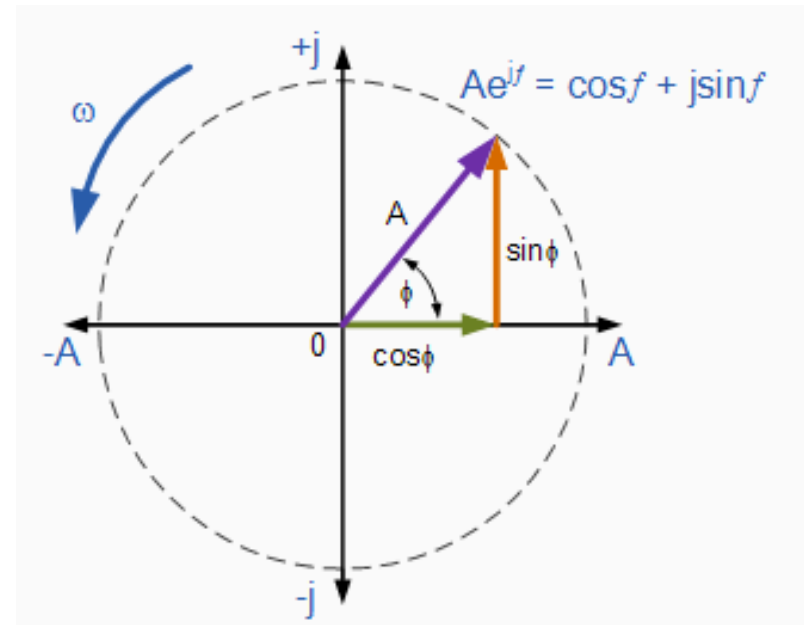
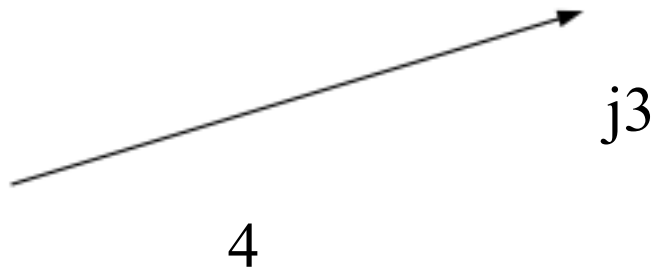
Rectangular

Euler's identity

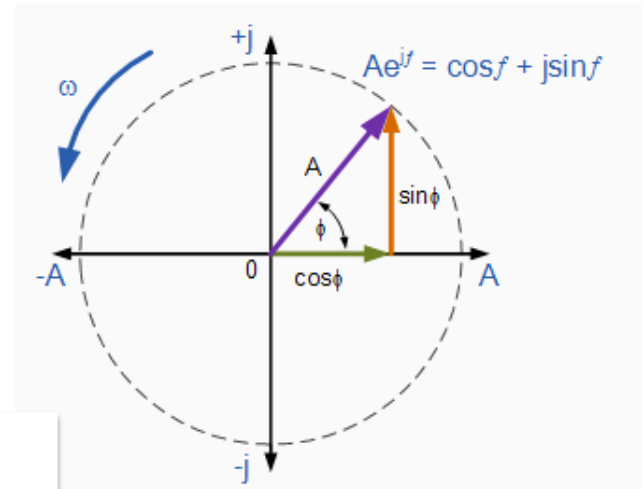
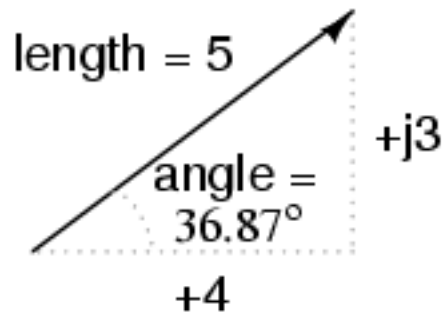


Checkpoint

Skriv följande komplex nummer i olika former:



Phasors: Example



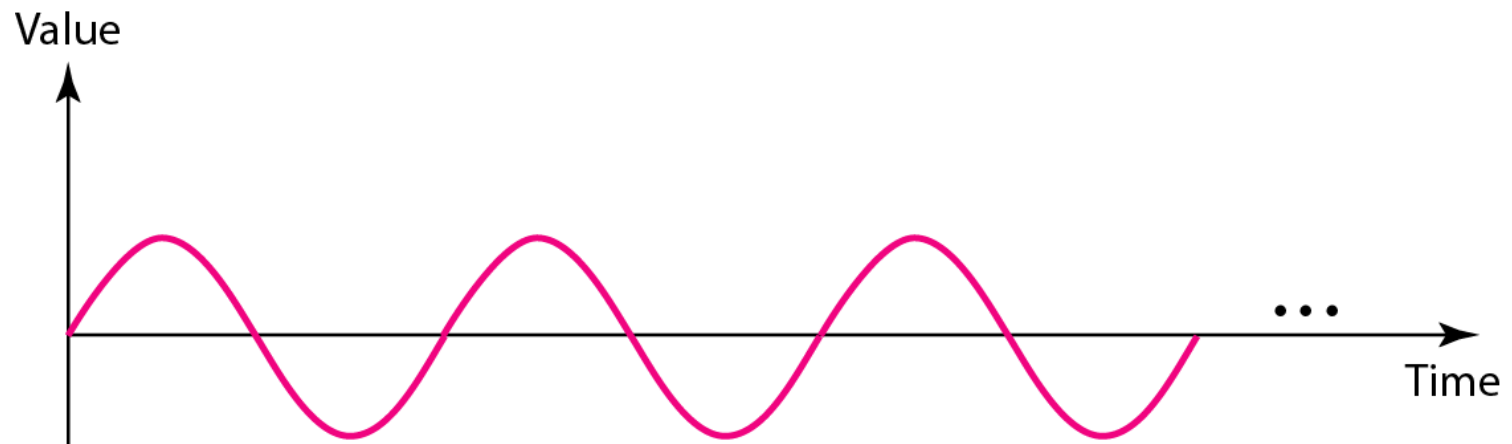
$$5 \angle 36.87^\circ \quad \text{(polar form)}$$

$$(5)(\cos 36.87^\circ) = 4 \quad \text{(real component)}$$

$$(5)(\sin 36.87^\circ) = 3 \quad \text{(imaginary component)}$$

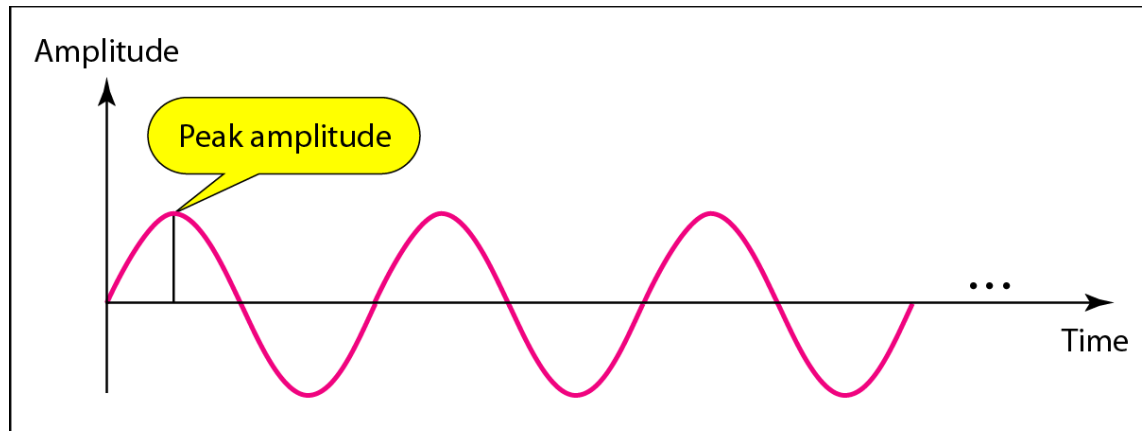
$$4 + j3 \quad \text{(rectangular form)}$$

Sinus & cosinus våg

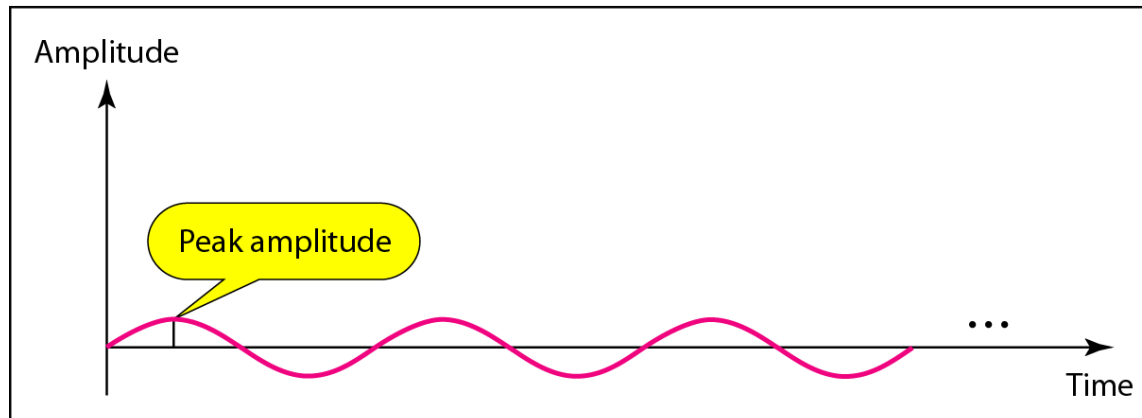


Sinusvåg: amplitud

Två våg med samma fas och frekvens, fast olika amplitud



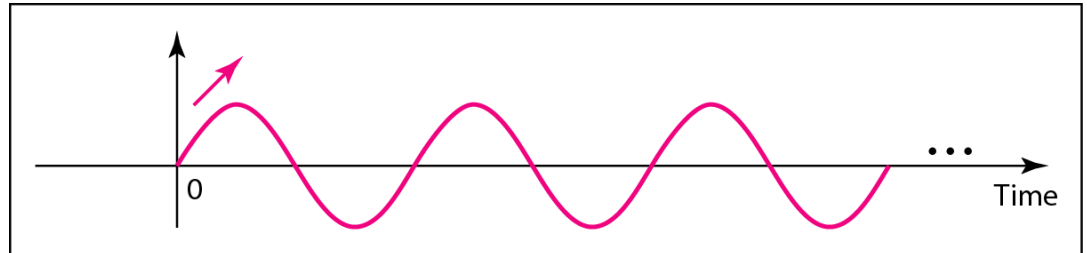
a. A signal with high peak amplitude



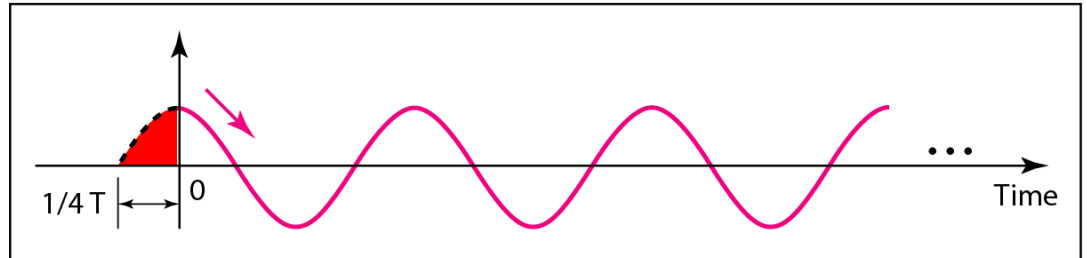
b. A signal with low peak amplitude

Sinusvåg: fas

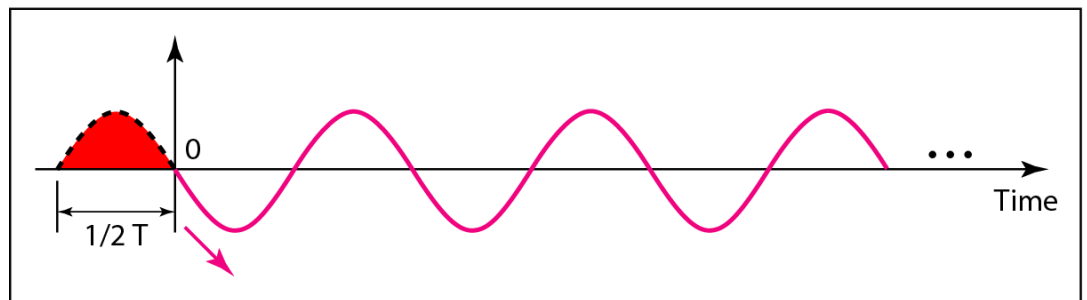
Fas beskriver position av vågform relativt till tid 0



a. 0 degrees

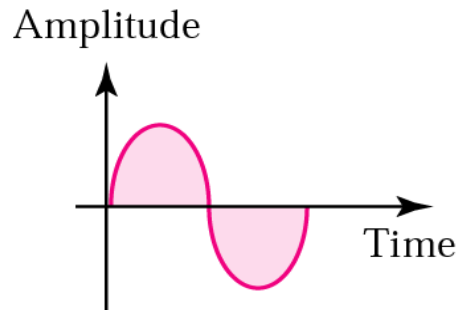


b. 90 degrees

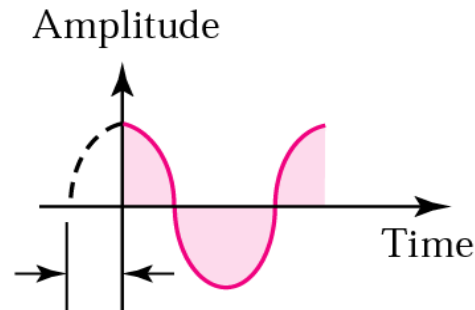


c. 180 degrees

Tre vågar med
samma amplitud och
frekvens, fast olika
fas

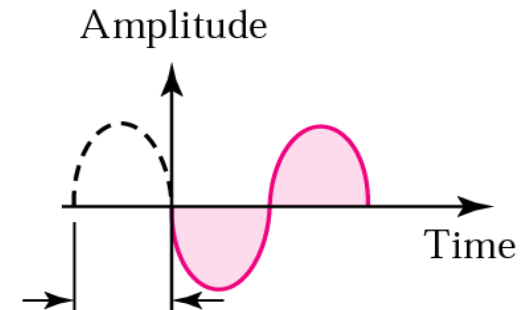


a. 0°



1/4 cycle

b. 90°



1/2 cycle

c. 180°

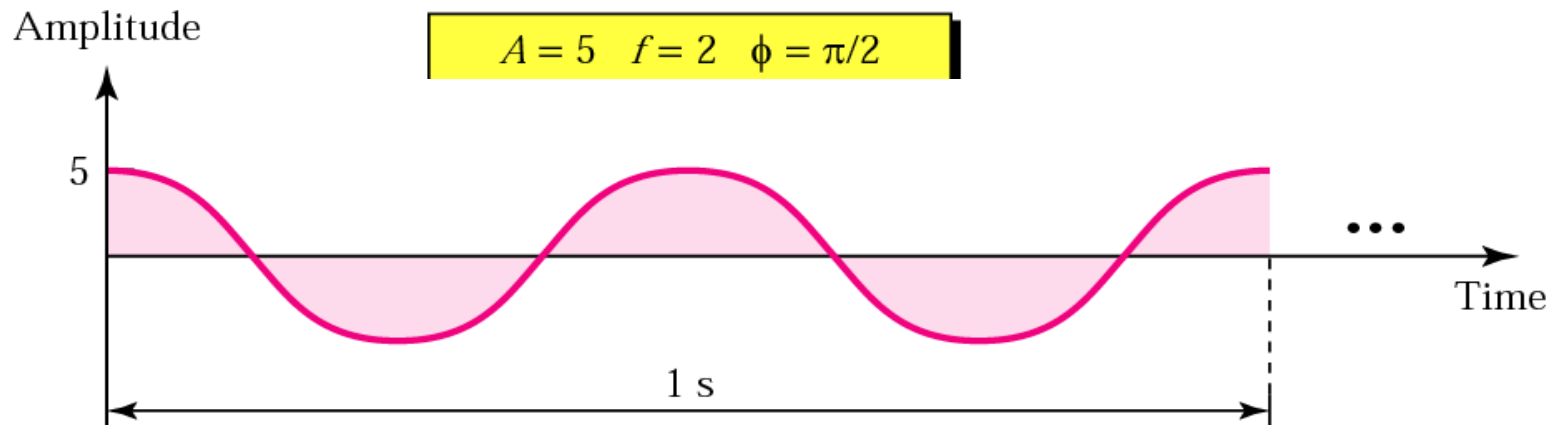
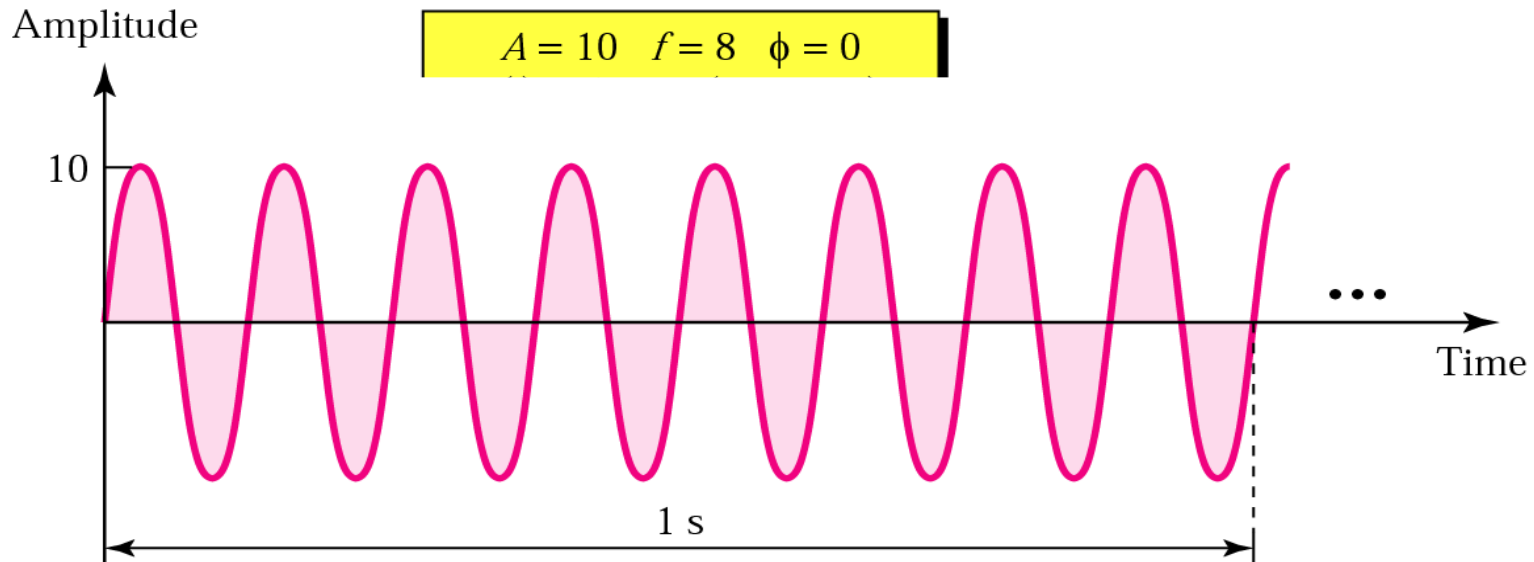
One complete cycle is 360 degrees.

For instance: 1/6 cycle is

$$(1/6) 360 = 60 \text{ degrees} = 60 \times 2\pi / 360 \text{ rad} = 1.046 \text{ rad}$$

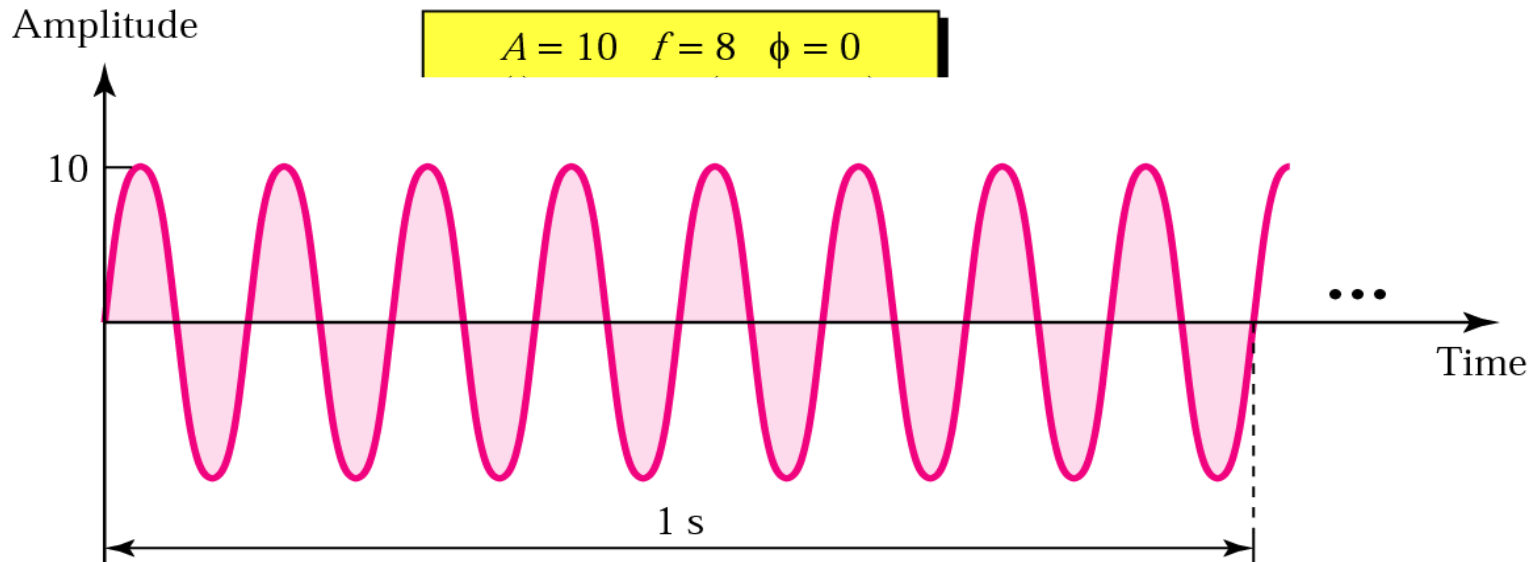
Checkpoint

Beskriv följande signal:

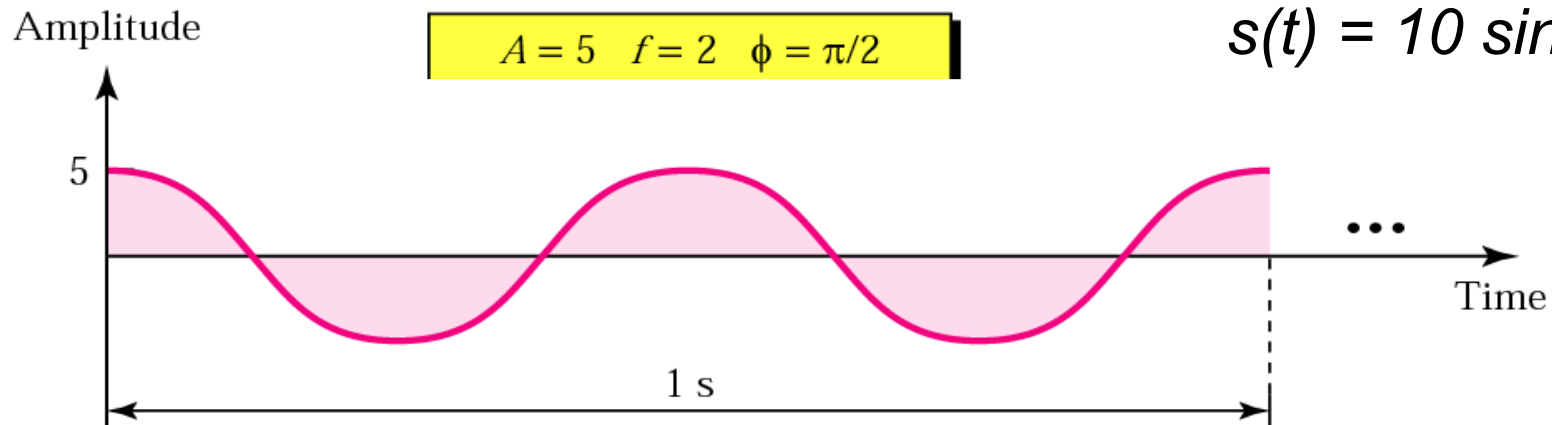


Checkpoint

Beskriv följande signal:



$$s(t) = 10 \sin(2\pi 8t)$$

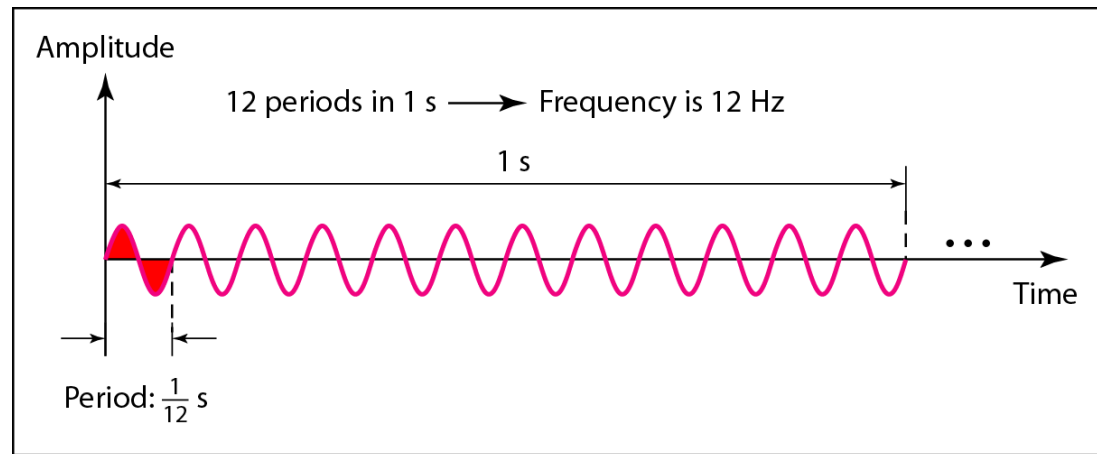


$$s(t) = 5 \sin(2\pi 2t + \pi/2)$$

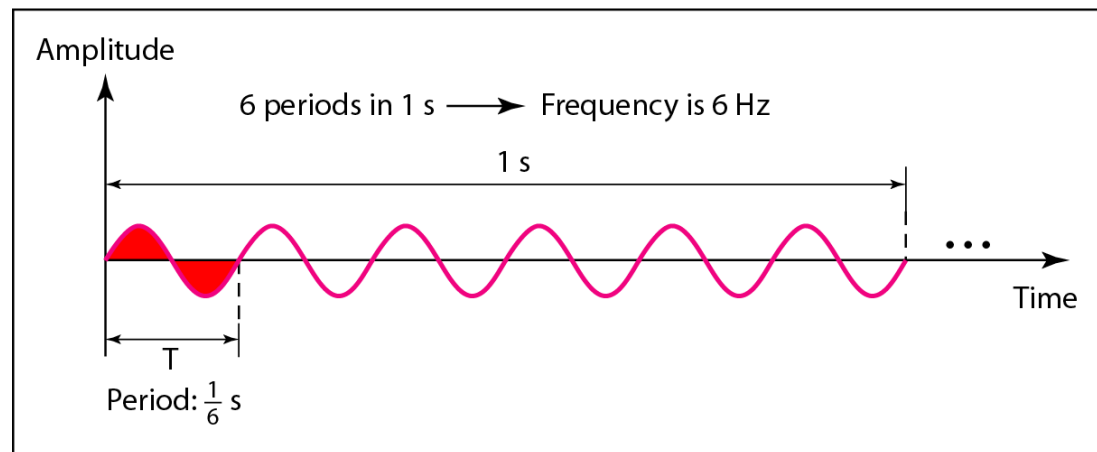
Sinusvåg: frekvens

Frekvens är ändringstakten med avseende på tiden.

Två våg med samma fas och amplitud, fast olika frekvenser



a. A signal with a frequency of 12 Hz



b. A signal with a frequency of 6 Hz

Förändring i en kort tid betyder hög frekvens.
Förändring under en lång tidsperiod innebär låg frekvens

Sinusvåg: frekvens

Frekvens är invers proportioner mot tiden

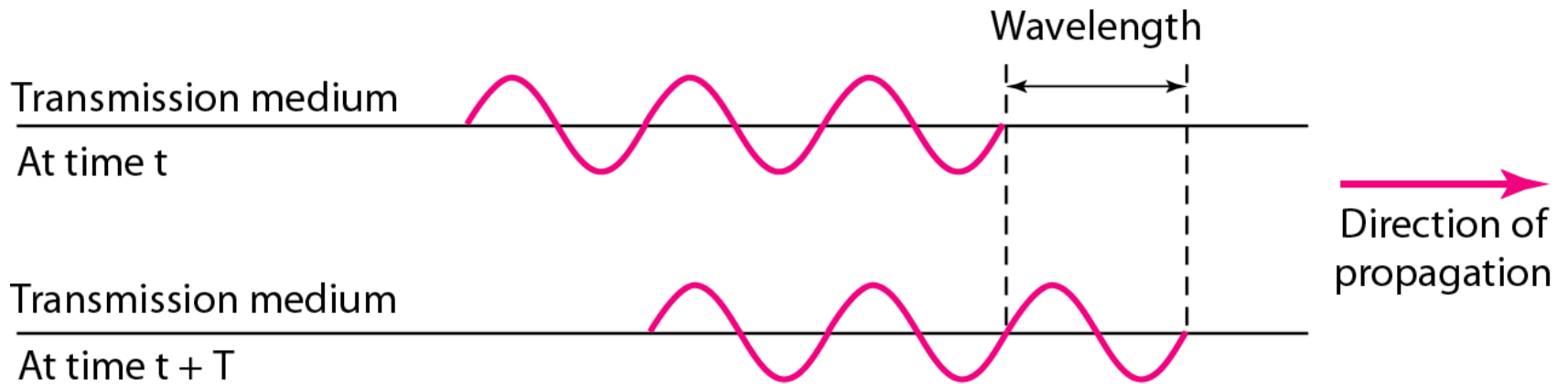
$$f = \frac{1}{T} \quad \text{and} \quad T = \frac{1}{f}$$

Om signalen inte förändras i tiden, är dess frekvensen noll

Unit	Equivalent	Unit	Equivalent
Seconds (s)	1 s	hertz (Hz)	1 Hz
Milliseconds (ms)	10^{-3} s	kilohertz (KHz)	10^3 Hz
Microseconds (μs)	10^{-6} s	megahertz (MHz)	10^6 Hz
Nanoseconds (ns)	10^{-9} s	gigahertz (GHz)	10^9 Hz
Picoseconds (ps)	10^{-12} s	terahertz (THz)	10^{12} Hz

Sinusvåg: våglängd och period

Frekvens



Checkpoint: våglängd och period

The power we use at home has a frequency of 60 Hz. The period of this sine wave can be determined as follows:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} = 0.0166 \text{ s} = 0.0166 \times 10^3 \text{ ms} = 16.6 \text{ ms}$$

Sammanfatning:

Amplitude – A measure of waveform strength at a given point in time

Frequency (Hertz, Hz) - # of times a wave cycles from high amplitude to low amplitude and back again measured in cycles/sec

Wavelength – the distance between corresponding points on a wave cycle

Phase – the progress of a wave over time in relationship to a fixed point

Taylorutveckling

Om n är ett positivt heltal, kan en taylorutveckling av ordning n av funktionen f skrivas som

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Taylorpolynomet

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Lanrangesrestterm

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

När taylorutvecklingens grad ökar, närmar den sig den sökta funktionen.

Taylorutveckling: Sinus funktion

Man kan approximera en funktion med en *geometrisk serie*

$$f(x) = \sin(x)$$

$$a = 0$$

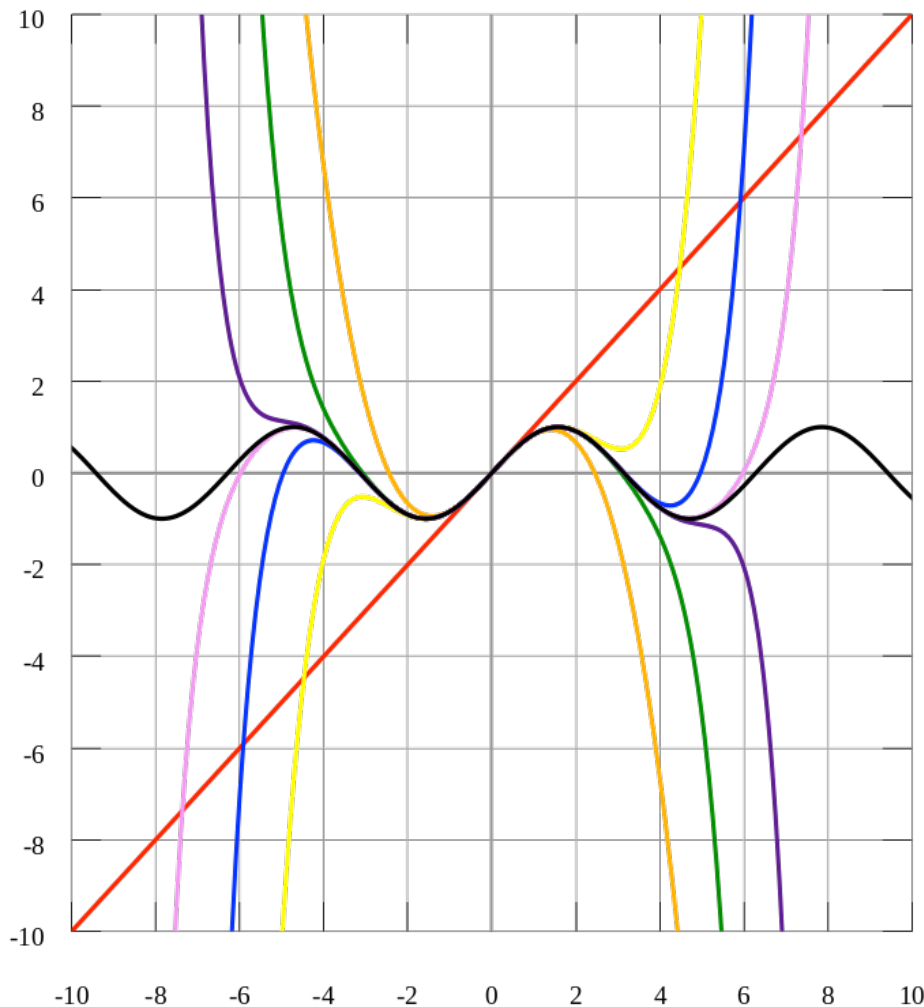
$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad \forall x$$

Taylorutveckling: Sinus funktion

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad \forall x$$



Funktionen $\sin(x)$ och dess taylorpolynom av grad 1, 3, 5, 7, 9, 11 och 13

Eulers formel

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad \forall x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad \forall x$$

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!} = 1 + j\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + j\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right). \end{aligned}$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Eulers formel

$$\begin{array}{l} e^{jx} = \cos x + j \sin x \\ e^{-jx} = \cos x - j \sin x \end{array} \longrightarrow \begin{cases} e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x \\ e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) \\ \sin x = \frac{1}{2j} (e^{jx} - e^{-jx}) \end{cases}$$

Moivres formel

$$(\cos x + j \sin x)^n = \cos nx + j \sin nx$$

Komplexa tal: olika form

Polar

Exponential

$$Z = x + jy = A \angle \varphi = A (\cos \varphi + j \sin \varphi) = A e^{j\varphi}$$

Rectangular

Euler's identity

