

INTRODUKTION TILL MAXWELLS EKVATIONER

Sammanfattning

Sambanden mellan källor och fält i elektromagnetism kan beskrivas med "Maxwells ekvationer". Två av ekvationerna (**Gauss lag**) beskriver fält som "flödar" ut från (ut ur) en källa eller in i en sänka (=negativ källa) (laddningar är flödeskällor/sänkor för E -fält, magnetfält har ingen flödeskälla/sänka). Flödet passerar då en tänkt slutet yta som innesluter (omsluter) källan. De övriga två ekvationerna, **Amperes lag** och **Faradays lag**, beskriver fält som "cirkulerar" (virvlar). Cirkulationskällan för magnetfält är elektriska strömmar (laddning som transporteras). Fältcirkulation hör också samman med *tidsvarierande elektriska och magnetiska flöden (genom öppna ytor)*. Kopplingen mellan tidsvariation hos magnetfältet och cirkulation hos det elektriska fältet (och vice versa) är av avgörande betydelse för utbredning av elektromagnetisk strålning (vågor). Vågor utbreder sig t.ex. i vakuum där vi inte har några källor i form av laddningar eller strömmar.

Det är viktigt att notera att ovan nämnda "tänkta" ytor och slingor inte behöver vara (men kan vara) något materiellt (ex.vis ledare). Oftast är de endast just en "tänkt" form som underlättar tänkandet av hur fälten bildas och deras fördelning i rummet kring laddningar och strömmar.

Maxwells ekvationer

De grundläggande ekvationerna för elektromagnetism kallas Maxwells ekvationer och beskriver hur elektriska fältet och magnetfältet är kopplade till varandra och hur de beror av elektriska laddningar och strömmar. Ekvationerna innehåller tidsderivator och rumsderivator (i tre dimensioner) av fälten. Ekvationerna kan även formuleras med hjälp av integraler (man summerar elektromagnetiska storheter över ytor och "slingor"). Båda arbetssätten kräver i allmänhet förtrogenhet med flervariabelanalys och vektoranalys. Integralformens *idéer* kan dock tillämpas utan att fördjupa sig i matematiken och man kan få viss insikt i principerna bakom elektromagnetismen! I specialfall där rumsfördelningen av laddningar eller strömmar har en enkel geometri räcker även envariabelanalys till för att få fram exakta resultat. I den här texten används integralformen.

Gauss lagar

Först en analogi med vattenflöde: Betrakta en liten källa som sprutar ut vatten i alla riktningar. För att bestämma källans styrka (=flödet=vattenmängden som källan avger, t.ex. mätt i liter per sekund) kan vi definiera en "tänkt" **sluten** yta någonstans utanför källan. Ytan ska alltså innesluta(omsluta) hela källan. Genom att mäta vattenmängden som *passerar ytan* kan vi bestämma källans flöde, eftersom allt vatten som källan avger kommer att passera genom den slutna ytan. En annan storhet av intresse är flödet per kvadratmeter yta. På motsvarande sätt styrkan hos en "sänka" (t.ex. ett avlopp där vatten rinner ner) bestämmas genom att mäta hur mycket vatten som flödar in genom en tänkt yta som innesluter sänkan.

Elektriskt laddade kroppar "sprutar" inte ut något materiellt, men vi kan ändå se laddningen som källa för E -fältet som vi representerar i form av riktade linjer som "flödar" ut ur källan ($Q > 0$) eller in i sänkan (=negativ källa, $Q < 0$). Om vi omsluter källan med en tänkt yta, så måste alla linjer som startar (eller slutar) i källan passera genom ytan. Detta resonemang kan sammanfattas i den första av Maxwells ekvationer: **Gauss lag** för det **elektriska fältet**. Betrakta en samling laddade partiklar med totala laddningen Q . Tänk dig en yta (behöver ej vara en verklig fysikalisk yta, utan det räcker med "tänkt" yta, s.k. "Gaussyta") som omsluter laddningen. Då har det sammanlagda *elektriska flödet* Φ_e [enhet coulomb] genom den tänkta ytan samma numeriska värde som totala laddningen innanför ytan, dvs $\Phi_e = Q$.

Vad är då sambandet mellan elektriskt flöde och elektrisk fältstyrka? Vi inför först storheten *elektrisk flödestäthet* $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ [enhet coulomb per m²] där ϵ är permittiviteten ($\approx 8,854 \cdot 10^{-12}$ farad/meter i vakuum). Det elektriska flödet Φ_e [enhet coulomb] är flödestätheten $\mathbf{D}$ vid Gaussytan multiplicerad med *arean* (A) hos Gaussytan: $\Phi_e = \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$. Denna definition gäller om $\mathbf{D}$ är överallt vinkelrät mot ytan [val av geometri hos ytan spelar mycket stor roll för de efterföljande beräkningarnas komplexitet ... en enkel, symmetrisk, laddningsfördelning medger ofta ett naturligt val av yta: punkt- eller sfärisk laddn. bör omslutas med en sfär, linje- eller cylindrisk laddn. med en cylinder, plan laddn. med en "låda". $\mathbf{D}$ blir då överallt vinkelrät mot ytan]. I andra fall måste man beräkna flödet genom en liten del av ytan genom att ta produkten mellan den komponent av $\mathbf{D}$ som är vinkelrät mot ytan och en liten area. Sedan summerar (integrerar) man alla små bidragen och erhåller det sammanlagda flödet. Flödet räknas positiv om det är riktad ut genom ytan och negativ om riktad in genom ytan.

Exempel: En kropp har laddningsmängden 1 μC . Vi placerar en "tänkt" kubisk låda med sidlängden 1 meter kring hela denna laddningsmängd. Hur stort elektriskt flöde passerar genom "lådans sidor"?

Gauss lag ger att $\Phi_e = \text{innesluten laddningsmängd} = 1 \mu\text{C}$.

Om den tänkta lådan istället har sidan 5 m, hur stort är flödet då?
Lådan omsluter fortfarande samma laddningsmängd, så $\Phi_e = 1 \mu\text{C}$.

Om lådan byts mot en sfär med diametern 1 m, så blir fortfarande $\Phi_e = 1 \mu\text{C}$.

Exempel: Bestäm elektriska fältstyrkan på avståndet 0,5 m från en liten kropp med laddningen 2,5 nC.

Eftersom vi inte känner till geometrin hos kroppen så kan vi endast beräkna ett slags medelvärde av $\mathbf{E}$. Vi tänker oss en "Gaussyta" i form av en sfär med radien 0,5 m kring kroppen. Flödet genom sfärytan är 2,5 nC. $\mathbf{D} = \Phi_e / A$ med $A = 4\pi r^2$ och $\mathbf{E} = \mathbf{D} / \epsilon_0$. Detta ger då att $\mathbf{D} = 7,96 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2$ och $\mathbf{E} = 90 \text{ V/m}$ med riktning ut ur kroppen. Som sagt, eftersom kroppens geometri är okänd (endast att den är "liten" till storlek), så är dessa värden endast uppskattningar (t.ex. kan ju fältet vara olika starkt i olika riktningar ...). En Gaussyta i form av en kub med sidan 0,5 m ger "medelvärden" på $\mathbf{D} = 1,67 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$ och $\mathbf{E} = 188 \text{ V/m}$. I båda beräkningarna förutsatte vi att $\mathbf{D}$ är vinkelrät mot A , vilket inte behöver vara fallet.

Uppgift 1: En liten sfärisk kropp (radie $\ll 10 \text{ cm}$) har laddningen 50 nC. Bestäm elektriska flödet från kroppen och beräkna elektriska fältstyrkan på avståndet 10 cm från kroppens centrum.

Uppgift 2: En kubisk låda genomkorsas av ett elektriskt fält. Sammanlagda flödet genom ytan är noll. Fältet är riktat så att den kommer in i lådan genom "loket" och passerar ut genom "botten". Hur stor laddningsmängd innehåller lådan? Hur stor är fältstyrkan vid "loket" om den har värdet 1000 V/m vid botten?

Uppgift 3: En kubisk låda med sidan 1 m genomkorsas av ett elektriskt fält. Fältet är riktat så att den kommer in i lådan genom "loket" och passerar ut genom "botten". Fältstyrkan vid "loket" är 3000 V/m och är riktad ut ur kuben och fältstyrkan vid botten är 200 V/m och riktad in i kuben. Inga fält passerar genom övriga ytor. Hur stor laddningsmängd finns innanför kuben?

Uppgift 4: Härled en formel för elektriska fältstyrkan utanför en sfärisk laddning Q ! Dvs. Coulombs lag... Antag att fältet är riktat radiellt ut från sfären. Fundera först vilken form Gaussytan ska ha!

Uppgift 5: Härled en formel för elektriska fältstyrkan utanför en cylinder med laddning Q ! Antag att cylindern har längden L och att fältet är riktat radiellt ut från cylindern. Du kan bortse från vad som händer nära ändpunkterna. Fundera först vilken form Gaussytan ska ha!

Uppgift 6: Härled en formel för elektriska fältstyrkan utanför en platta med laddning Q ! Antag att plattan har arean A och att fältet är riktat vinkelrätt ut från plattan. Du kan bortse från vad som händer nära kanterna. Fundera först vilken form Gaussytan ska ha!

Uppgift 7: Använd resultatet från uppgift 6 till att bestämma en formel för E -fältet mellan två plattor. Platta 1 har laddningen $+Q$ och platta 2 har laddningen $-Q$.

Det finns även **Gauss lag för magnetfält**. Då gäller att det magnetiska flödet genom en **sluten** yta alltid är noll (det finns inga magnetiska monopoler, dvs magnetiska laddningar): $\Phi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \text{noll}$. Notera att här avses flödet genom en *sluten* yta (och inte som i Faradays induktionslag där ytan är öppen).

Uppgift 8: Argumentera, med hjälp av Gauss lag för magnetfält, för att magnetfält alltid bildar slutna slingor.

Amperes lag och Faradays lag

Gauss lagar beskriver fält kring källor som ger ett flöde ut ur eller in mot källan. Vi vet dock att t.ex. elektriska strömmar ger upphov till magnetfält som *cirkulerar* kring källan [jämför med vatten som fås att virvla med en propeller som drivs via en axel, eller alternativt att man använder en propeller som mätsond: om den roterar så har vätskan cirkulation]. Så gäller även t.ex. vid induktion där ett tidsvarierande magnetiskt flöde hör ihop med ett cirkulerande E -fält som kan driva en induktionsström. Cirkulation av fälten beskrivs av *Amperes lag* och *Faradays lag*.

Amperes lag

Cirkulation kan beskrivas matematiskt genom att studera hur kraftigt en ”pil” (vektor) tenderar att vrida sig vid en liten förflyttning i rummet. Exempelvis så följer $\mathbf{B}$ -fältet kring en rak ström en cirkel. Cirkulationen (Γ_m) av magnetfältet definieras som $\Gamma_m = \mathbf{H} \cdot \mathbf{L}$ där $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ är den magnetiska fältstyrkan (enhet ampere/meter), μ är permeabiliteten ($4\pi \cdot 10^{-7}$ henry/meter i vakuum) och L är omkretsen hos en ”tänkt” slinga (behöver inte vara materiell) som omsluter (omringar) cirkulationskällan (strömmen) eller ett tidsvarierande elektriskt flöde. Här antog vi att magnetfältet exakt följer den tänkta slingan (”Ampereslinga”), d.v.s. att magnetfältspilen alltid är samriktad med tangenten till slingan. Om så inte är fallet så får man addera (integrera) många små bidrag till cirkulationen, i form av produkten mellan längden av en kort del av slingan och tangentiella komponenten av magnetfältet vid den positionen. På samma sätt som i Gauss lag, så leder en symmetrisk källgeometri (strömfördelning) till val av slinga som ger enkla beräkningar. Cirkulationsriktningen ges av ”**högerhandsregeln**”: tummen sätts i strömriktningen (alternativt i riktning för E -fältsändringen $d\mathbf{E}/dt$) och fingrarna ger riktningen för magnetfältets cirkulation.

Amperes lag säger att cirkulationen av magnetfältet är lika med strömmen som omsluts av slingan + tidsderivatan av elektriska flödet som omsluts av slingan (man kan också säga att strömmen + tidsvarierande fältet passerar genom en **öppen** yta vars rand är lika med den tänkta slingan):

$\Gamma_m = I + d\Phi_e/dt$. Den sista termen (tidsvarierande elektriska flödet) utgör den s.k. "förskjutningströmmen", och är viktig t.ex. för att förstå hur energi transporteras in i eller ut ur kondensatorer samt för mekanismen för utbredning av elektromagnetiska vågor.

Exempel: Strömmen 1 mA flyter i en ledare. Bestäm magnetiska cirkulationen kring ledaren och magnetiska flödestätheten på avståndet 1 cm från ledaren. Det finns inget tidsvarierande E -fält i området.

$\Gamma_m = I + d\Phi_e/dt$ men $d\Phi_e/dt = 0$ enligt uppgift. Alltså blir cirkulationen $\Gamma_m = I = 1$ mA. Eftersom vi inte vet geometrin hos ledaren så kan vi bara göra en uppskattning av B -fältet (vi får ett slags medelvärde). Vi lägger en cirkulär "Ampereslinga" (d.v.s. en tänkt slinga kring strömmen) med radien 1 cm kring strömmen. Omkretsen är $L = 2\pi r = 0,02\pi$ meter vilket ger $H = 0,0159$ ampere/meter och $B = 2 \cdot 10^{-8}$ tesla. Om strömmen är rak så är dessa värden exakta (då har strömmen cylindergeometri och en sådan omsluts på ett naturligt sätt av en cirkel ...)

Exempel: En "Ampereslinga" genomkorsas av två strömmar. Slingan är i papprets plan och strömmen $I_1 = 2$ A är riktad in i pappret. Den resulterande cirkulationen av magnetfältet är noll. Hur stor och vilken riktning har den andra strömmen I_2 ?

Cirkulationen är $\Gamma_m = I_1 + I_2 = 0$ ger att $I_2 = -2$ A, minustecknet visar att I_2 är motriktad I_1 och kommer upp ur pappret.

Uppgift 9: Bestäm cirkulationen kring en rak ström med styrkan 5 ampere. Beräkna magnetiska fältstyrkan och magnetiska flödestätheten på avståndet 20 cm från ledaren. Vad är lämplig form för "Ampereslinga"?

Uppgift 10: Tre långa och raka ledare med strömmarna $I_1 = -3$ A, att $I_2 = +2$ A och $I_3 = -1$ A ligger placerade mycket nära varandra. Positiv ström är riktad in i pappret. Ungefär hur stort är och vilken riktning har B -fältet på avståndet 2 meter från ledarna. Hur stor är cirkulationen?

Uppgift 11: Härled en formel för B -fältet på avståndet r från en rak ström.

Uppgift 12: En ström flyter i en ledare i form av en tunn men lång platta. Plattan har bredden b och längden L och är mycket tunn (tjocklek ungefär noll). Plattan är orienterad så att dess tvärsnitt är i papprets plan och strömmen går längs ledaren in i papprets plan. Lägg en Ampereslinga i form av en rektangel och härled en formel för cirkulationen och B -fältet kring ledaren!

Uppgift 13: Argumentera att Hopkinsons lag följer ur Amperes lag (med $d\Phi_e/dt$ lika med noll). Demonstrera detta i en enkel magnetisk krets med en källa och en reluktans.

Uppgift 14: I alla uppgifter så här långt har vi inte behövt ta hänsyn till termen $d\Phi_e/dt$ i Amperes lag $\Gamma_m = I + d\Phi_e/dt$. Vi avslutar med att ta en titt på den! Betrakta nu en komponent där vi har ett tidsvarierande E -fält, nämligen plattkondensatorn. Under upp- och urladdning av kondensatorn varierar E -fältet och därmed det elektriska flödet $\Phi_e = D \cdot A$ mellan plattorna i tid. Amperes lag visar att det finns ett cirkulerande magnetfält kring detta tidsvarierande elektriska flöde! Ett tidsvarierande elektriskt fält och ett cirkulerande magnetfält hör ihop! Antag nu att vi har en plattkondensator med cirkulära plattor (radie 1,3 cm, plattavstånd 2 mm) och E -fältet ökar linjärt från 0 V/m till 10 000 V/m under tidsintervallet 10 ms. Hur stor

är cirkulation av magnetfältet och hur stor är magnetiska flödestätheten nära utkanten av området mellan plattorna? Sätt $\epsilon = \epsilon_0$.

Faradays lag

Vi har nu hunnit fram till den fjärde och sista av Maxwells ekvationer, **Faradays lag** som beskriver induktion, d.v.s. hur ett elektriskt fält är sammankopplat med ett tidsvarierande magnetflöde. Detta kan beskrivas genom att införa *cirkulationen* av $\mathbf{E}$ -fältet (Γ_e). Om vi återigen antar, att fältet följer den valda slingan ($\mathbf{E}$ tangentiell med slingan) som blir $\Gamma_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}$, där L är omkretsen hos en ”tänkt” slinga som omsluter ett tidsvarierande magnetflöde.

Faradays lag lyder $\Gamma_e = -d\Phi_m/dt$. Eftersom $\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}$ är produkten mellan $\mathbf{E}$ -fält och sträcka så är den en spänning. Man säger att det tidsvarierande magnetflödet inducerar ett cirkulerande elektriskt fält som leder till en spänning och kan driva en induktionsström. [Ännu korrektare är att säga att ett cirkulerande $\mathbf{E}$ -fält hör ihop med ett tidsvarierande magnetflöde.]

Högerhandsregeln ger cirkulationsriktningen för $\mathbf{E}$ -fältet: Tummen *motsatt* (p.g.a. minustecknet!) $d\Phi_m/dt$, krökta fingrar ger $\mathbf{E}$:s och därmed induktionsströmmens (om slutna ledande slinga) riktning. [Alternativt kan man införa en *vänsterhandsregel*, med tummen i samma riktning som förändringen $d\Phi_m/dt$, fingrarna ger $\mathbf{E}$ -fältets cirkulationsriktning.]

Uppgift 15: En slinga med arean 1 m^2 genomkorsas av ett magnetfält med tidsberoendet $B(t) = 10 \cdot (t - 2)^2$ tesla i intervallet mellan $t=0$ och $t=2$ sekunder, för övrigt är $B=0$. Bestäm den inducerade spänningen som funktion av tiden.

Uppgift 16: Betrakta en slinga som består av två seriekopplade resistorer och ett batteri. Antag att inget tidsvarierande magnetfält genomkorsar slingan och argumentera för att Faradays lag då är identisk med Kirchhoffs spänningslag!

Uppgift 17: Tillämpa Faradays lag (med magnetfältstermen lika med noll) till att argumentera att det måste finnas $\mathbf{E}$ -fält även utanför kanten av en plattkondensator! [Ofta bortser man från detta ”kantfält” och antar att det är noll.]

Poyntingvektorn och energitransport

Som avslutning kan vi ta en titt på hur man kan beskriva överföring (transport) av elektromagnetisk energi. Energin kan anses vara lokaliserad i fälten. En uppladdad kondensator eller en magnetiserad induktor har lagrat energi i $\mathbf{E}$ - respektive $\mathbf{B}$ -fältet.

Uppgift 18: Gör en dimensionsanalys av uttrycken $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$, $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, $\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|}$ samt $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ (där $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ är strömtätheten genom ett tvärsnitt mätt i ampere/kvadratmeter, σ är materialets konduktivitet d.v.s. 1/resistivitet)! Vilken enhet har dessa storheter? Vilken typ av storhet kan de tänkas representera?

Energitätheten (joule/ m^3) i en rumsposition (punkt) ges för det elektriska fältet av $\frac{1}{2}\epsilon|\mathbf{E}|^2$ och för magnetfältet av $\frac{1}{2}\mu|\mathbf{H}|^2$ ($= \frac{1}{2\mu}|\mathbf{B}|^2$). Energimängden som transporteras per tidsintervall genom en tvärsnittsarea (joule per sekund och kvadratmeter) beskrivs av den så kallade **Poyntingvektorn** $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ som har storleken $|\mathbf{E}||\mathbf{H}|$ om $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$ är vinkelräta mot varandra. Riktning för transporten är vinkelrät mot både $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$ (ges av högerhandsregeln för vektorprodukt). $\mathbf{S}$ har enheten watt/ m^2 och är en effekttäthet (eller intensitet).

Uppgift 19: Gör en dimensionsanalys av uttrycken $\frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$ respektive $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ och beräkna sedan uttryckens värde i vakuum. Det senare är den så kallade "vågimpedansen" och beskriver kvoten mellan $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$ hos en våg. Vad beskriver den första storheten?

Uppgift 20: Tänk dig ett område där magnetfältet är riktat in i papprets plan och ökar i styrka. Det tidsvarierande magnetfältet är associerat med ett $\mathbf{E}$ -fält. Skissera $\mathbf{E}$ -fältets riktning och bestäm sedan riktningen för Poyntingvektorn. Är den elektromagnetiska energin i området konstant, ökande eller minskande med avseende på tiden?

Uppgift 21: Tänk dig ett område där elektriska fältet är riktat upp ur papprets plan och avtar i styrka. Det tidsvarierande $\mathbf{E}$ -fältet är associerat med ett magnetfält. Skissera magnetfältets riktning och bestäm sedan riktningen för Poyntingvektorn. Är den elektromagnetiska energin i området konstant, ökande eller minskande med avseende på tiden?

Uppgift 22: Använd resultaten från uppg. 12 och kunskaper om $\mathbf{E}$ -fältet i en plattkondensator till att beräkna effekten som transporteras i en plattledning (= "lång plattkondensator"). Beräkna Poyntingvektorn i området mellan plattorna och multiplicera med områdets tvärsnittarea) och jämför med Joules lag från kretsteori, $P=UI$.

Uppgift 23: Betrakta en cylinderformad resistor med resistansen R , längden L och radien r . Resistorn ansluts till en spänningskälla med spänningen U . Bestäm Poyntingvektorn $\mathbf{S}$ vid resistorns yta och bestäm sedan formel för effektutvecklingen. Jämför med Joules lag! Studera också hur Poyntingvektorn är riktad (bestäm först riktning för $\mathbf{E}$ - och $\mathbf{B}$ -fältet och använd högerhandsregel: tummen längs $\mathbf{E}$, pekfinger längs $\mathbf{B}$, handflatan ger riktning för $\mathbf{S}$) och notera varifrån effekten kommer till resistorn!

Uppgift 24: Betrakta en plattkondensator med cirkulära plattor. Bestäm riktningen för Poyntingvektorn när kondensatorn laddas upp [magnetfältet har diskuterats i uppgift 14.] Hur kommer energin till området mellan plattorna?

Uppgift 25: a) Förklara (utan detaljerade beräkningar) hur en elektriskt laddad partikel, som accelereras alstrar elektromagnetisk strålning. Gör detta genom att först rita en skiss av $\mathbf{E}$ -fältet kring en punktformad laddning. Tänk dig sedan att partikeln accelereras genom att den plötsligt "rycks" iväg från sin start position. Skissera $\mathbf{E}$ -fältet kring partikeln i dess nya position. Eftersom det tar viss tid för informationen om fältförändringen att utbreda sig, så kommer en observatör på ett tillräckligt långt avstånd att fortfarande se det "gamla" fältet, även efter det att partikeln accelererats. När informationen når fram till observatören så övergår fältlinjerna från "gamla" till det "nya" fältet. Rita in detta i din bild genom att på ett visst avstånd från startpunkten förbinda det "gamla" och det "nya" fältet. Du ser då att det blir en "knyck" i fältlinjen. "Knycken" är den del av $\mathbf{E}$ -fältet som utgör den utbredande vågen (strålningen) [vi har här endast ritat ut $\mathbf{E}$ -fältet, det finns givetvis även ett tillhörande $\mathbf{B}$ -fält.]

b) Använd din bild och ange i vilka riktningar (relativt riktningen för partikelns acceleration) som den del av totala $\mathbf{E}$ -fältet som utgör strålningen är starkast respektive svagast.

c) Låt den laddade partikeln utföra en i tid sinusformad rörelse (oscillation) och skissa $\mathbf{E}$ -fältet hos den resulterande strålningen. Jämför *partikelns acceleration* och det resulterande $\mathbf{E}$ -fältets *storlek och riktning* direkt efter att det har genererats. När fås maximal styrka hos fältet? När är fältstyrkan noll?

Litteraturtips:

Texter som kräver kunskaper i hantering av vektorer, och i viss utsträckning flervariabelanalys. Delar kan dock läsas och förstås redan på tekniskt basår och högskoleingenjörsutbildningar:

Ruth W. Chabay & Bruce A. Sherwood *Matter & Interactions* (3:e utgåvan, Wiley)
Lars Alfred Engström *Elektromagnetism: Från bärnsten till fältteori* (Studentlitteratur)
Daniel Fleisch *A Student's Guide to Maxwell's Equations* (Cambridge University Press)
Klas Hultqvist *Elektricitet och magnetism från början* (Studentlitteratur)
Kjell Prytz *Elektrodynamik i nytt ljus* (Studentlitteratur)

En bok (där matematiken håller sig till algebra) om relativitetsteori. Kapitel 7 och 8 handlar om elektromagnetism:

Sören Holst *Rumtid – en introduktion till Einsteins relativitetsteori* (Studentlitteratur)

Populärvetenskapliga texter som beskriver personer bakom viktiga upptäckter inom elektromagnetism:

David Bodanis *Elektricitet: Historien om universums mäktigaste kraft* (Norstedts förlag)
David Bodanis *$E=mc^2$: Historien om världens mest kända ekvation* (Norstedts förlag)
Nancy Forbes & Basil Mahon *Faraday, Maxwell, and the Electromagnetic Field* (Prometheus Books)
W. Bernard Carlson *Tesla – Inventor of the Electrical Age* (Princeton University Press)
Alan Hirshfeld *The Electric Life of Michael Faraday* (Walker & Company)
Lucy Jago *Norrskenet: Berättelsen om Kristian Birkeland – ett bortglömt geni* (Månpocket)
Basil Mahon *The Man Who Changed Everything – The Life of James Clerk Maxwell* (Wiley)
Basil Mahon *Oliver Heaviside: Maverick mastermind of electricity* (The Institution of Engineering and Technology)
Nikola Tesla *Mina uppfinningar* (Atlantis)
Nikola Tesla *The Essential Tesla* (Wilder Publications)

En populärvetenskaplig bok om fysik (inklusive en del beräkningar) där fysiken alltid vävs in i en intressant historia:

Hans-Uno Bengtsson *Nalle Puh och atomens existens* (Prisma)

Vill pröva på att läsa "mästaren själv", så rekommenderas följande enklare framställning av grunder i elektricitetslära [texten behandlar inte den fullständiga fältteorin]:

James Clerk Maxwell *An Elementary Treatise on Electricity* (2:a utg., Dover Publications).

Andra läsvärda verk som inte specialiserar sig på elektromagnetism:

Walter Lewin (with Warren Goldstein) *For the Love of Physics* (Free Press)
Richard P. Feynman *QED The Strange Story of Light and Matter* (Penguin Books)
Heinz R. Pagels *The Cosmic Code* (Penguin Books) Finns även översatt till svenska språket.
Ian Stewart *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos* (Penguin Books)

En riktig klassiker om allehanda fysik:

Feynman, Leighton, Sands *The Feynman lectures on physics*
De tre volymerna finns numera även online <http://www.feynmanlectures.caltech.edu/>

Slutligen, om man vill fundera & reflektera kring kunskap och vetenskap på ett mer generellt plan, så finns intressant läsning i exempelvis:

Sve-Eric Liedman *Ett oändligt äventyr* (Albert Bonnier förlag)
Peter Sylwan *Att upptäcka det oväntade* (Fri Tanke förlag)

Svar till de flesta uppgifterna

- 1) $\Phi_e = 50 \text{ nC}$ och $E = 4,5 \cdot 10^4 \text{ V/m}$
- 2) $Q=0$ och $E = 10^3 \text{ V/m}$
- 3) $Q = \epsilon_0 A (E_{\text{botten}} - E_{\text{lock}}) = -2,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$
- 4) Val av sfär med radien r som Gaussyta ($A = 4\pi r^2$) leder med $Q = \epsilon_0 A E$ till $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ där $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.
- 5) Val av cylinder med höjden L och radien r som Gaussyta ger $E = \frac{Q}{L 2\pi \epsilon_0 r}$.
- 6) Val av låda med lock- och bottenarea vardera lika med A som Gaussyta ger $E = \frac{Q}{2A}$.
- 7) Mellan plattorna är fälten från de två plattorna lika stora stora och samriktade och utanför lika stora men motriktade. Detta ger med hjälp av formeln från uppgift 6 att $E = \frac{Q}{A}$ i området mellan plattorna och $E=0$ utanför.
- 8) –
- 9) $H \approx 4 \text{ ampere/meter}$ och $B \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ tesla}$.
- 10) $I_{\text{total}} = -2 \text{ ampere}$ (minustecken visar att riktning upp ur pappret) innebär en moturs cirkulationen med styrkan 2 ampere och $B = 2 \cdot 10^{-7} \text{ tesla}$.
- 11) Val av en cirkel med radien r som Ampereslinga ger $H \cdot 2\pi r = I$ och $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$.
- 12) Val av en rektangel med långa sidorna $=b$ och korta sidorna ≈ 0 som Ampereslinga ger $H \cdot 2b = I$ och $B = \frac{\mu I}{2 \cdot b}$.
- 13) –
- 14) $\Gamma_m = d\Phi_e / dt = \epsilon \cdot A \cdot \frac{dE}{dt} \approx 4 \cdot 10^{-9} \text{ ampere}$ och $\Gamma_m = \frac{B \cdot 2\pi r}{\mu}$ ger $B \approx 7,2 \cdot 10^{-14} \text{ tesla}$.
- 15) Inducerade spänningen är -40 volt vid tiden noll och växer linjärt till 0 volt vid tiden 2 sekunder. Innan tiden noll och efter tiden 2 sekunder är spänningen noll.
- 16) –
- 17) –
- 18) $[ED] = \text{J/m}^3$, $[BH] = \text{J/m}^3$, $[EH] = \text{W/m}^2$, $[E/H] = \Omega$, dvs energitätheter, effektlöde respektive impedans. $[JE] = \text{W/m}^3$ effekttäthet för omvandling av elektrisk energi till termisk energi).
- 19) $[\frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}] = \text{m/s}$, $[\frac{\mu}{\epsilon}] = \Omega$. I vakuum är $\frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (ljusets fart) och $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \approx 377 \Omega$.
- 20) Moturs cirkulerande E -fält, S radiellt in mot området, energin ökar.
- 21) Medurs cirkulerande H -fält, S radiellt ut från området, energin minskar.
- 22) $|E| = U/d$ och $|H| = I/b$ där d är avståndet mellan plattorna och b är plattornas bredd. E är vinkelrät mot B . Detta leder till $|S| = |E| \cdot |H| = \frac{U \cdot I}{b \cdot d}$ och $P = S \cdot A = \frac{U \cdot I}{b \cdot d} \cdot b \cdot d = U \cdot I$. Effekten flödar med hjälp av fälten i området mellan plattorna.
- 23) Cylindergeometri! $|E| = U/d$ och $|B| = \frac{\mu I}{2\pi r}$ där d är avståndet mellan plattorna och r är plattornas radie. E är vinkelrät mot B . Detta leder till $|S| = |E| \cdot |H| = \frac{|E| \cdot |B|}{\mu} = \frac{U \cdot I}{2\pi r \cdot d}$ och $P = S \cdot A = \frac{U \cdot I}{2\pi r \cdot d} \cdot 2\pi r \cdot d = U \cdot I$. S är riktad in i resistorns mantelyta dvs vinkelrätt in i resistorn. Effekten kommer alltså in i resistorn utifrån med hjälp av fälten.
- 24) Samma geometri (cylinder ...) som i uppgift 20. S är riktad in i kondensatorns mantelyta dvs effekten flödar via fälten in vinkelrätt in i området mellan plattorna. När kondensatorn är fullt uppladdad så upphör effektlödet ty magnetfältet och därmed även Poyntingvektorn blir noll. Energin är nu upplagrat i det elektriska fältet mellan plattorna.
- 25) Starkast strålning (=största ”knycken”) i riktning vinkelrätt mot accelerationen, ingen ”knyck” (=ingen strålning) i riktning parallellt med accelerationen.